

PERMANENZPROBLEME
FÜR INDUKTIVE LIMITEN

von

Nikolaos Macheras

aus Ierissos Chalkidikis (Griechenland)

Diss. Erlangen

1984 № 356

PERMANENZPROBLEME FÜR INDUKTIVE LIMITEN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Nikolaos Macheras
aus Ierissos Chalkidikis (Griechenland)

Als Dissertation genehmigt von den naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 10.02.1984

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. K. Jacobs

Erstberichterstatter: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter: Priv. Doz. Dr. S. Graf

Meinen Eltern Dimitri und Kalliopi gewidmet,

Αφιερωμένο στους γονείς μου Δημήτρη και Καλλιόπη

Permanenzprobleme für induktive Limiten

Inhaltsverzeichnis:

<u>Einleitung</u>	i - viii
<u>Bezeichnungen</u>	ix - x
<u>Teil I</u>	
<u>Topologische Probleme</u>	1
§ 0. Vorbereitungen	1
§ 1. Induktive Limiten von topologischen Räumen	11
§ 2. Strikte induktive Limiten von topologischen Räumen	14
<u>Teil II</u>	
<u>Maßtheoretische Probleme</u>	22
§ 3. Induktive Limiten von Maßräumen	22
§ 4. Induktive und projektive Limiten von L^p -Räumen	33
§ 5. Induktive und projektive Limiten von L^∞ -Räumen	
Starke Liftings	50
§ 6. Punkt-Realisierung von L^∞ -Endomorphismen	63
§ 7. Graphen von meßbaren Abbildungen	68
§ 8. Meßbare Korrespondenzen	76
<u>Teil III</u>	
<u>Funktionalanalytische Probleme</u>	93
§ 9. Isomorphie von $C(X)$ -Räumen	93
§ 10. Injektivität - Projektivität	104
<u>Anhang (zu Teil II)</u>	
<u>Strikte Desintegrationen</u>	115
<u>Literaturverzeichnis</u>	118



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

In dieser Arbeit werden topologische, maßtheoretische und funktionalanalytische Eigenschaften und Aussagen darauf untersucht, ob sie beim Übergang zum induktiven oder projektiven Limes erhalten bleiben.

In Teil I wird durch Gegenbeispiele gezeigt, daß die folgenden Eigenschaften sich von einem induktiven System auf seinen induktiven Limes i.a. nicht übertragen lassen:

T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , vollständige Regularität, perfekte Normalität, schwach perfekte Normalität, Metrisierbarkeit, Kompaktheit, Lokalkompaktheit, Parakompaktheit und Zerstreutheit

sich von einem induktiven System auf seinen induktiven Limes i.a. nicht übertragen.

In § 1 wird eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung dafür angegeben, daß der induktive Limes von Hausdorffschen bzw. normalen Räumen wieder Hausdorffsch bzw. normal ist.

In § 2 wird u.a. bewiesen, daß der strikte induktive Limes von T_1 -Räumen wieder T_1 ist. Weiter wird gezeigt:

- i) Ist X^∞ der strikte induktive Limes von normalen bzw. perfekt normalen bzw. parakompakten Räumen X_n ($n \in \mathbb{N}$), die abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, so ist X^∞ wieder normal bzw. perfekt normal bzw. parakompakt.
- ii) Der induktive Limes einer Folge von null-dimensionalen kompakten Räumen ist wieder null-dimensional (Beweis mittels Stone-Dualität).

Schließlich wird in § 2 durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß der (strikte) induktive Limes von polnischen Räumen i.a. kein polnischer Raum ist. Andere topologische Probleme werden auch im Teil III behandelt.

Nachdem die von VASILACH [1] angegebene Konstruktion eines induktiven Limes von Maßräumen als fehlerhaft erkannt worden ist (siehe VASILACH [4]), wird in Teil II, § 3 die Existenz des induktiven Limes in der Kategorie der Maßräume mit meßbaren, maßverkleinernden Abbildungen als Morphismen bewiesen. Dabei wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß der induktive Limes von Radon-Maßen (bzw. Räumen) i.a. kein Radon-Maß (bzw. Raum) ist.

In § 4 wird die Beziehung zwischen dem L^p -Raum eines induktiven Limes von Maßräumen und den L^p -Räumen seines induktiven Systems untersucht. Für die L^p -Räume mit $1 \leq p < +\infty$ wird folgendes bewiesen:

Ist $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ der induktive Limes eines induktiven Systems $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Maßräumen, so gilt:

- a) $L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ kann als Banachraum in einem Ban_1 -projektiven Limes von $(L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha \in I}$ eingebettet werden.
- b) Für den Fall, daß $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = \text{s.} \lim_{\alpha \in \mathbb{N}} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$, ist der Banachraum $L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ zu einem Ban_1 -projektiven Limes von $(L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha \in I}$ isomorph.

Schließlich wird noch bewiesen, daß der L^p -Raum des strikten induktiven Limes eines induktiven Systems von Maßräumen als ein

strikt induktiver Limes der L^p -Räume des induktiven Systems in der Kategorie der Banachräume mit linearen Kontraktionen als Morphismen dargestellt werden kann.

Entsprechende Resultate werden für L^∞ -Räume in § 5 bewiesen. Als Anwendung wird bewiesen, daß die Eigenschaft der Existenz eines (starken) Liftings bei der Bildung des induktiven Limes erhalten bleibt. Dieses Resultat verallgemeinert bekannte Existenzsätze aus der Theorie der starken Liftings.

Unter Verwendung der Ergebnisse des § 5 wird in § 6 ein Satz über die Punkt-Realisierung von L^∞ -Endomorphismen bewiesen.

Genauer handelt es sich um folgendes:

Gegeben seien zwei lokalisierbare Maßräume (X, U, μ) , $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ und ein normaler Homomorphismus $\underline{\Phi}$ von $L^\infty(X, U, \mu)$ nach $L^\infty(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ (genaue Definition siehe dort). Man sagt, daß $\underline{\Phi}$ die Punkt-Realisierungseigenschaft hat, falls eine Abbildung η von Y nach X existiert mit folgenden Eigenschaften:

- i) Wenn $f \in M_{\mathbb{C}}^\infty(X, U, \mu)$, dann $f \circ \eta \in M_{\mathbb{C}}^\infty(Y, \mathfrak{M}, \nu)$.
- ii) Wenn $A \subseteq X$ eine Nullmenge ist, dann ist $\eta^{-1}(A)$ eine Nullmenge.

- iii) Wenn $f \in M_{\mathbb{C}}^\infty(X, U, \mu)$, dann $\underline{\Phi}([f]) = [f \circ \eta]$.

Ist jetzt (X, U, μ) ein lokalisierbarer Maßraum, $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ der strikte induktive Limes von strikt lokalisierbaren Maßräumen $(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$, und hat jeder normale Homomorphismus von $L^\infty(X, U, \mu)$ nach $L^\infty(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$ die Punkt-Realisierungseigenschaft, so hat jeder normale Homomorphismus von $L^\infty(X, U, \mu)$ nach $L^\infty(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ die Punkt-Realisierungseigenschaft. Dieses Resultat verallgemeinert den Satz von VESTERSTRØM-WILS [1].

Unter Benutzung der Resultate der vorigen Paragraphen wird in § 7 folgende Charakterisierung von meßbaren Abbildungen durch ihren Graphen angegeben:

Ist $(X^\infty, \mathfrak{B}(X^\infty), \mu)$ der strikte induktive Limes von polnischen Maßräumen $(X_n, \mathfrak{B}(X_n), \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei alle X_n abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, und Y ein polnischer Raum, so sind für eine Abbildung $f : X^\infty \rightarrow Y$ folgende Aussagen äquivalent:

- i) f ist $\mathfrak{B}(X^\infty)_\mu$ - $\mathfrak{B}(Y)$ -meßbar
- ii) $\text{Gr}(f) \in \mathfrak{B}(X^\infty)_\mu \otimes \mathfrak{B}(Y)$.

Dieses Resultat verallgemeinert einen Satz von BUCKLEY [1].

§ 8 behandelt Probleme aus der Theorie der meßbaren Korrespondenzen. In Abschnitt 8.2 wird unter der Kontinuums-hypothese folgender Satz vom Filippov-Typ bewiesen:

Es seien X^∞ der strikte induktive Limes von separablen metrischen Räumen X_n , wobei alle X_n abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, Y ein Hausdorffscher Raum, (T, A) ein meßbarer Raum, Γ eine punktabgeschlossene kompakt-meßbare Korrespondenz von T nach X^∞ , $f : X^\infty \rightarrow Y$ stetig, und $g : T \rightarrow Y$ kompakt-meßbare Abbildung mit $g(t) \in f(\Gamma(t))$ für alle $t \in T$. Dann existiert ein kompakt-meßbarer Schnitt $\gamma : T \rightarrow X^\infty$ von mit $g(t) = f(\gamma(t))$.

Dies verallgemeinert einen Satz von HIMMELBERG [1].

In Abschnitt 8.3 zeigen wir, unter Verwendung eines Projektions-satzes von Arsenin und Kunugui, folgende Verallgemeinerung eines Satzes von SRIVASTAVA [2]:

Ist T analytisch, X^∞ der strikte induktive Limes von polnischen Räumen X_n , wobei alle X_n abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit allen $F(t) \cap X_n$ σ -kompakt und $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$, so existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times \mathbb{N} \times \Delta \longrightarrow X^\infty$, so daß $F(t) = f(t, \mathbb{N} \times \Delta)$ für jedes $t \in T$.

Als Korollar zu diesem Satz ergibt sich eine Verallgemeinerung eines Schnittsatzes von BROWN und PURVES [1]. Genauer gilt:

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes hat F eine Castaing-Darstellung.

Weiterhin wird folgender Satz bewiesen:

Es seien T , X^∞ , $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie oben und F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit $F(t) \cap X_n$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$
- b) F hat eine Castaing-Darstellung.

Mit Hilfe der bisherigen Resultate des § 8 wird weiter bewiesen:

Es sei T ein analytischer Raum, X^∞ der strikte induktive Limes von kompakten metrischen Räumen X_n ($n \in \mathbb{N}$) und F eine punktabgeschlossene Korrespondenz von T nach X^∞ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$.
- b) Es existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times (\mathbb{N} \times \Delta) \longrightarrow X^\infty$, so daß $F(t) = f(t, \mathbb{N} \times \Delta)$.
- c) F hat eine Castaing-Darstellung.

- d) F ist schwach-meßbar.
- e) F ist kompakt-meßbar.
- f) F ist meßbar.

Dieser Satz verallgemeinert ein Theorem von HIMMELBERG [1,3.5(ii)]. Außerdem ergibt sich als Korollar zu diesem Satz ein Resultat von LEVIN [2].

Schließlich zeigen wir in § 8 folgende Verallgemeinerung eines Resultates von IOFFE [2] über die Ausfüllung des Graphen $\text{Gr}F$ einer Korrespondenz F mit meßbaren Schnitten, die "schön" z.B. injektiv parametrisiert sind.

Es seien (T, A, μ) ein σ -endlicher vollständiger Maßraum, X^∞ der strikte induktive Limes von überabzählbaren polnischen Räumen X_n für $n \in \mathbb{N}$, F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit allen $F(t) \cap X_n$ überabzählbaren Teilmengen von X_n , und $\text{Gr}F \in A \otimes \mathcal{B}(X^\infty)$. Dann existiert ein polnischer Raum Z und eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times Z \rightarrow X^\infty$, so daß die Abbildung $f(t, \cdot) : Z \rightarrow X^\infty$ für alle $t \in T$ injektiv ist, und $F(t) = f(t, Z)$ für alle $t \in T$ gilt.

In Teil III § 9 wird eine Verallgemeinerung des Lemmas von Muljutin und seiner Verallgemeinerung durch Etcheberry behandelt.

Genauer gesagt werden folgende Resultate bewiesen.

Sei X^∞ der strikte induktive Limes von lokalkompakten vollständigen, metrischen Räumen (X_n, d_n) mit $d_{n+1}|_{X_n \times X_n} = d_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und mit gleichem Gewicht w ($w \geq \aleph_0$).

Dann existiert eine F_σ -Menge X_N in W^N - wobei W ein diskreter Raum mit Gewicht w ist -, die der strikte induktive Limes von

null-dimensionalen, metrisierbaren, topologisch vollständigen Räumen ist, so daß folgendes gilt:

Es existiert eine stetige surjektive Abbildung

$\pi : X_{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\infty}$, die einen strikt- und normstetigen regulären Mittelungsoperator $L : C_b(X_{\mathbb{N}}) \longrightarrow C_b(X^{\infty})$ gestattet.

Das Lemma von Muljutin und seine Verallgemeinerung durch Etcheberry lassen sich also auf gewisse topologische Räume verallgemeinern, welche i.a. weder metrisierbar noch lokalkompakt noch topologisch vollständig sind.

Der abschließende § 10 beschäftigt sich mit der Frage der Abgeschlossenheit der Injektivität und Projektivität in zwei Kategorien von Banachräumen unter der Bildung von induktiven bzw. projektiven Limiten.

Unter Verwendung der Dualitätstheorie von Banaschewski zwischen M-Räumen und kompakten Räumen wird folgendes bewiesen:

Ist $(A_{\infty}, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der projektive Limes in der Kategorie MU der M-Räume mit Einheit, mit Vektorverbandshomomorphismen als Morphismen des induktiven Systems $(A_n, f_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$, wobei alle A_n injektiv in MU und alle f_{nm} surjektiv und vollständig sind, so ist A_{∞} MU-injektiv.

Die Voraussetzung, daß alle f_{nm} surjektiv sind, beschränkt die Allgemeinheit nicht. Dabei wird bewiesen, daß der induktive Limes $(X^{\infty}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ in Comp eines induktiven Systems $(X_n, f_{mn})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ von projektiven Räumen X_n , mit allen f_{mn} injektiv und k -stetig für jede unendliche Kardinalzahl k (genaue Definition siehe dort) wieder projektiv ist.

Folgendes Problem wird weiter negativ beantwortet:

Es seien $(A_\alpha, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ der projektive Limes in Ban_1 von $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ und $(\hat{A}_\alpha, h_\alpha)$ die Ban_1 -injektive Hülle von A_α für jedes $\alpha \in I$. Existieren Ban_1 -Morphismen $\hat{f}_{\alpha\beta} : \hat{A}_\beta \rightarrow \hat{A}_\alpha$ für $\alpha \leq \beta \in I$, so daß $(\hat{A}_\alpha, \hat{f}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein Ban_1 -projektives

System ist, und die Relation

$$\varprojlim_{\alpha \in I} \hat{A}_\alpha = \widehat{\varprojlim_{\alpha \in I} A_\alpha} \quad \text{in } Ban_1$$

gilt?

Schließlich wird durch ein Gegenbeispiel bewiesen, daß der Ban_1 -induktive (bzw. Comp-projektive bzw. Bool-induktive) Limes von Ban_1 -injektiven Räumen (bzw. Comp-projektiven Räumen bzw. injektiven Booleschen Algebren) i.a. kein Ban_1 -injektiver Raum (bzw. Comp-projektiver Raum bzw. injektive Boolesche Algebra) ist.

In einem Anhang zum Teil II wird bewiesen, daß der strikte induktive Limes von strikten Desintegrationen wieder eine strikte Desintegration ist.

Ich danke allen, die mich bei dieser Arbeit begleitet haben.

Meinem früheren Lehrer, Herrn Professor Dr. D.A. Kappos, möchte ich dafür herzlich danken, daß er meine ersten Schritte in der mathematischen Forschung hilfreich begleitet hat.

Für einen Hinweis zu dem Beispiel 3.3.6 bedanke ich mich bei Herrn Professor Dr. B. Anger. Herrn Priv. Doz. Dr. S. Graf gilt mein Dank für die anregenden und nützlichen Gespräche.

Besonders herzlich danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, für die Betreuung dieser Arbeit.

Bezeichnungen

Alg	Kategorie der Algebren mit multiplikativen linearen Abbildungen als Morphismen.
Ban ₁	Kategorie der Banachräume mit linearen Kontraktionen als Morphismen.
Balat ₁	Kategorie der Banachverbände mit Vektorverbandshomomorphismen mit Norm ≤ 1 als Morphismen.
Bool	Kategorie der Booleschen Algebren mit Booleschen Homomorphismen als Morphismen.
$\mathbb{B}^n$	Abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum 0 und Radius 1.
$\mathring{\mathbb{B}}^n$	Offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum 0 und Radius 1.
C*	Kategorie der Kommutativen C*-Algebren mit Eins mit ihren Eins-erhaltenden *-Homomorphismen als Morphismen.
Comp	Kategorie der kompakten (Hausdorffschen) Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen.
Ens	Kategorie der Mengen mit Abbildungen als Morphismen.
F(X)	System der abgeschlossenen Teilmengen von X.
$\mathcal{K}$	Eine beliebige Kategorie.
K(X)	System der kompakten Teilmengen von X.
Lat	Kategorie der Verbände mit Verbandshomomorphismen als Morphismen.
loconv	Kategorie der lokalkonvexen Räume mit stetigen linearen Abbildungen als Morphismen.
$\mathcal{M}$	Kategorie der Maßräume mit meßbaren maßverkleinernden Abbildungen als Morphismen.
$\mathcal{M}_{\text{top}}$	Kategorie der topologischen Maßräume mit stetigen meßbaren maßverkleinernden Abbildungen als Morphismen.
$M(X, \mathcal{M}, \mu)$	Raum der μ -f.ü. beschränkten meßbaren reellwertigen Funktionen auf X.

$M^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$	Raum der beschränkten meßbaren reellwertigen Funktionen auf X .
$\text{Mor } \mathcal{K}$	Klasse der Morphismen in $\mathcal{K}$.
$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$	Teilmenge von $\text{Mor } \mathcal{K}$, wobei (A, B) ein geordnetes Paar von Objekten aus $\mathcal{K}$ ist.
$N(X, \mathfrak{M}, \mu)$	Teilraum von $M(X, \mathfrak{M}, \mu)$ der μ -f.ü. gleich Null Funktionen.
nX	die größte null-dimensionale Hausdorff-Kompaktifizierung eines null-dimensionalen Hausdorffschen Raumes.
$O(X)$	System der offenen Teilmengen auf X .
$S(B)$	Raum, der zu der Booleschen Algebra B dual ist.
S^n	Sphäre in $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum O und Radius 1.
Top	Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen.
Topvect	Kategorie der topologischen linearen Räume mit stetigen linearen Abbildungen als Morphismen.
Vectlat	Kategorie der Vektorverbände mit Vektorverbandshomomorphismen als Morphismen.
$X \cup_f Y$	Topologischer Raum $(X+Y)/R$, wobei X, Y topologische Räume sind, f eine stetige Abbildung von einem Teilraum X_0 von X nach Y ist und $R := \{(x, f(x)) \mid x \in X_0\}$ ist.
$\delta(A)$	Durchmesser von A .
$\cong$	Isomorphie
$A \subseteq B$	A läßt sich isomorph auf einen Teilraum von B abbilden.
β	strikte Topologie
$O\text{-dim.}$	Null-dimensional (Ein topologischer (Hausdorffscher) Raum heißt $O\text{-dim.}$, falls er eine Basis von offenen-abgeschlossenen Teilmengen hat.)
Δ	Cantorsche Menge.

TEIL I: TOPOLOGISCHE PROBLEME

§ 0. Vorbereitungen

In diesem Paragraph werden die kategorielle Definition des induktiven (bzw. projektiven) Limes und Beispiele dieser Definition in gewissen Kategorien angegeben. Der Begriff einer Kategorie wird im Sinn von SEMADENI [1] verwendet.

Grothendieck hat die Definition eines induktiven Limes in einer beliebigen Kategorie angegeben und hat auch bestimmte hinreichende Bedingungen formuliert, damit ein solcher Limes existiert (siehe SEMADENI-ZIDENBERG [2, S.597]).

0.1 Definition:

Es seien I eine aufsteigend filtrierende Menge, $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Objekten und $(f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ (bzw. $(f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$) eine Familie von Morphismen $f_{\beta\alpha} : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ (bzw. $f_{\alpha\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$) in einer Kategorie $\mathcal{K}$.

Die Familie $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ (bzw. $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$) heißt ein induktives (bzw. projektives) System in der Kategorie $\mathcal{K}$, falls

folgende Eigenschaften gelten:

$$(i) \quad f_{\alpha\alpha} = \text{id}_{X_\alpha} \quad \text{für jedes } \alpha \in I$$

$$(ii) \quad f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\gamma\alpha} \quad (\text{bzw. } f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}) \quad \text{für } \alpha \leq \beta \leq \gamma \in I$$

$(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ (bzw. $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$) heißt ein induktiver (bzw. projektiver) Limes in $\mathcal{K}$, falls X^∞ (bzw. X_∞) ein Objekt in $\mathcal{K}$ ist,

$f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X^\infty$ (bzw. $f_\alpha : X_\infty \rightarrow X_\alpha$) Morphismen sind und folgende

Bedingungen erfüllt sind:

(I) $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ (bzw. $f_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = f_\beta$) für alle $\alpha \leq \beta \in I$

(II) Für jedes Objekt B in $\mathcal{K}$ und für jede Familie von

Morphismen $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow B$ (bzw. $\hat{g}_\alpha : B \rightarrow X_\alpha$) in $\mathcal{K}$ mit

$g_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_\alpha$ (bzw. $\hat{g}_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = \hat{g}_\beta$) für $\alpha \leq \beta \in I$, existiert

genau ein Morphismus $g : X^\infty \rightarrow B$ (bzw. $\hat{g} : B \rightarrow X_\infty$), so

daß:

$$g \circ f_\alpha = g_\alpha \text{ (bzw. } f_\alpha \circ \hat{g} = g_\alpha \text{) für jedes } \alpha \in I.$$

Ein induktiver (bzw. projektiver) Limes in einer Kategorie $\mathcal{K}$ wird durch

$$(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha}) \text{ in } \mathcal{K}$$

$$\text{(bzw. } (X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varprojlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\alpha\beta}) \text{ in } \mathcal{K})$$

in Zeichen ausgedrückt.

Wenn keine Verwechslung möglich ist, kann ein induktiver (bzw. projektiver) Limes in $\mathcal{K}$ durch

$$X^\infty = \varinjlim_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ in } \mathcal{K}$$

$$\text{(bzw. } X_\infty = \varprojlim_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ in } \mathcal{K})$$

bezeichnet werden.

Schließlich sei vermerkt, daß der induktive (bzw. projektive) Limes in $\mathcal{K}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

0.2 Beispiele von induktiven (bzw. projektiven) Limiten in gewissen Kategorien

Die klassischen (nicht kategoriellen) Definitionen von induktiven (bzw. projektiven) Limiten sind, wie im folgenden gezeigt wird, Beispiele der kategoriellen Definition eines induktiven (bzw. projektiven) Limes.

0.2.1 Kategorie Ens:

- a) Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Ens, wobei die Objekte X_α paarweise disjunkt sind, und X die direkte Summe von X_α ; $\alpha \in I$ in Ens.

Es seien außerdem R eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$(x_\alpha, x_\beta) \in R : \Leftrightarrow \exists \gamma \in I \text{ mit } \alpha, \beta \leq \gamma : f_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f_{\gamma\beta}(x_\beta)$$

wobei $x_\alpha \in X_\alpha$ und $x_\beta \in X_\beta$, X^∞ die Quotientenmenge X/R ,

$f: X \rightarrow X^\infty$ die kanonische Surjektion und $f_\alpha := f|_{X_\alpha}$ die Einschränkung von f auf X_α für $\alpha \in I$.

Dann ist $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Ens (siehe BOURBAKI [2, III, §§ 7,5,6 Prop.6]).

- b) Es seien $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Ens, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das kartesische Produkt von X_α ; $\alpha \in I$ in Ens, X_∞ die Teilmenge von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, wobei jedes Element x von X_∞ die Relationen

$$\text{pr}_\alpha(x) = f_{\alpha\beta} \circ \text{pr}_\beta(x) \quad \text{für alle } \alpha \leq \beta \in I$$

erfüllt, und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$ die Einschränkung von pr_α auf X_∞ für $\alpha \in I$.

Dann ist $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein projektiver Limes von

$(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Ens (siehe BOURBAKI [2, III, §§ 7,1,2, Prop.1]).

0.2.1.1 Bemerkung

Sind $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Objekten in Ens mit $X_\alpha \subseteq X_\beta$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$, $X^\infty = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, $j_{\beta\alpha}: X_\alpha \rightarrow X_\beta$ (bzw. $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow X^\infty$) die kanonische Injektionen von X_α nach X_β (bzw. von X_α nach X^∞), so ist $(X_\alpha, j_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ (bzw. $(X^\infty, (j_\alpha)_{\alpha \in I})$) ein induktives System

(bzw. ein induktiver Limes von $(X_\alpha, j_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Ens (Beweis nach 0.2.1 und nach BOURBAKI [2, III, §§ 7,6]).

0.2.2 Kategorien Top, Comp.

a) Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Top,

$X := \sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ die topologische direkte Summe von X_α , R die in 0.2.1(a) definierte Äquivalenzrelation, X^∞ der Quotientenraum X/R $f : X \rightarrow X^\infty$ die kanonische Surjektion und $f_\alpha := f|_{X_\alpha}$ für $\alpha \in I$.

Dann ist $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Top (siehe DUGUNDJI [1, Appendix two, I, 1,2,3,4,5 Th]).

Ist $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Comp, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ sein induktiver Limes in Top, $(\beta X^\infty, \delta^{X^\infty})$ die Stone-Cech Kompaktifizierung von X^∞ (für die Definition siehe SEMADENI [1, IV, § 14.1] und $\hat{f}_\alpha := \delta^{X^\infty} \circ f_\alpha$ für $\alpha \in I$, so ist $(\beta X^\infty, (\hat{f}_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Comp.

b) Es seien $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Top, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das kartesische Produkt von X_α in Top, X_∞ der Teilraum

$\{ x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha, \beta \in I \text{ mit } \alpha = \beta \Rightarrow \text{pr}_\alpha(x) = f_{\alpha\beta} \circ \text{pr}_\beta(x) \}$ von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$. Dann ist $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein projektiver Limes von $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Top (siehe DUGUNDJI [1, Appendix two, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 Th]).

Der Begriff eines projektiven Limes in Comp stimmt mit jenem in Top überein (siehe DUGUNDJI [1, Appendix two, 2.4]).

0.2.3 Kategorien Vect, Alg, Bool, Lat, Vectlat

a) Sind $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Vect und

$(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ sein induktiver Limes in Ens, wie in 0.2.1 beschrieben ist, so definiert man Addition und Skalarmultiplika-

tion für X^∞ folgendermaßen:

Es seien $x, y \in X^\infty$ und $\lambda \in K$ (K beliebiger Körper). Dann existiert ein $\alpha \in I$ mit $x = f_\alpha(x_\alpha)$, $y = f_\alpha(y_\alpha)$; $x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha$.

Es seien ferner $x + y := f_\alpha(x_\alpha + y_\alpha)$, $\lambda x := f_\alpha(\lambda x_\alpha)$.

Dann werden X^∞ ein Vektorraum auf K und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_\beta)_\alpha \leq \beta \in I$ in Vect.

Analog konstruiert man einen induktiven Limes in Alg (siehe für beide BOURBAKI [1, § 6, 5-6]).

b) Sind $(X_\alpha, f_\beta)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Vect und $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das kartesische Produkt von X in Vect, so wird

$X_\infty := \{ x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha, \beta \in I \text{ mit } \alpha \leq \beta \Rightarrow \text{pr}_\alpha(x) = f_{\alpha\beta} \circ \text{pr}_\beta(x) \}$

ein Teilvektorraum von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und ist $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$, wobei

$f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$ die Einschränkung von pr_α auf X_∞ für alle $\alpha \in I$

sind, ein projektiver Limes von $(X_\alpha, f_\beta)_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Vect

(siehe BOURBAKI [1, § 6, 1-3]).

c) Analog beschreibt man einen induktiven (bzw. projektiven) Limes in Bool und in Lat (siehe HAIMO [1]).

Ebenfalls kann man den Begriff eines induktiven (bzw. projektiven) Limes in Vectlat formulieren.

0.2.4 Kategorie loconv

a) Es sei $(X_\alpha, f_\beta)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in loconv. Sind dann H_0 die lineare Hülle der $x_\alpha - f_\beta(x_\alpha)$ in $\sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ und H_0 abgeschlossen in $\sum_{\alpha \in I} X_\alpha$, so ist der Raum $(\sum_{\alpha \in I} X_\alpha) / H_0$ - versehen mit der Quotientenraumtopologie - ein Hausdorffscher Raum.

Die oben genannte Topologie auf $X^\infty := (\sum_{\alpha \in I} X_\alpha) / H_0$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie, für welche alle kanonischen

Abbildungen $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X^\infty$ stetig sind. $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ist

ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in loconv (siehe KÖTHE [1, § 19, 3]).

- b) Es sei X^∞ ein Vektorraum, der die Vereinigung einer echt aufsteigenden Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von lokalkonvexen Räumen X_n ist, und es induziere die Topologie des X_{n+1} auf X_n die jene des X_n . Sind $j_{nm} : X_m \longrightarrow X_n$ für $m \leq n$ die kanonischen Injektionen, so ist $(X_n, j_{nm})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System in loconv. Es seien weiter X^∞ versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, für welche alle kanonischen Injektionen $j_n : X_n \longrightarrow X^\infty$ stetig sind. Dann ist $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ein induktiver Limes in loconv und heißt der strikte induktive Limes von $(X_n, j_{nm})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ in loconv (siehe KÖTHE [1, § 19, 4]).
- c) Es seien $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in loconv, X_∞ der lineare Teilraum von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, der aus allen $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ mit $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ besteht und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$ die Einschränkungen von pr_α auf X_∞ . Man erkläre auf X_∞ als Topologie die durch die Topologie von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ auf X_∞ induzierte Topologie. Dann wird $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein projektiver Limes von $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in loconv (siehe KÖTHE [1, § 19, 8]).

0.2.4.1 Beispiel

Folgendes bekannte Beispiel zeigt, daß das erste Abzählbarkeitsaxiom (und deshalb die Metrisierbarkeit) sich von einem induktiven System auf seinen induktiven Limes in loconv i.a. nicht überträgt (siehe A.P.ROBERTSON - W.J.ROBERTSON [1, V, Suppl.(3) und VII, § 1, Prop. 5, Suppl. (1)]). Dies zeigt auch, daß der loconv- (bzw. top-)induktive Limes von polnischen Räumen i.a. kein polnischer Raum ist.

Es sei $X = \mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie. Für $K \in K(X)$ bezeichne $C_K(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq K$. Es seien weiter

$\mathcal{K}(X, \mathbb{R}) := \bigcup_{K \in K(X)} C_K(X)$ und

$j_{KK'} : C_{K'}(X) \rightarrow C_K(X)$ für $K, K' \in K(X)$ mit $K' \subsetneq K$

(bzw. $j_K : C_K(X) \rightarrow \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ für $K \in K(X)$)

die kanonischen Injektionen.

Dann sind $(C_K(X), j_{KK'})_{K' \subsetneq K \in K(X)}$ ein induktives System und $(\mathcal{K}(X, \mathbb{R}), (j_K)_{K \in K(X)})$ sein induktiver Limes in loconv. Die Räume $C_K(X)$ sind mit der Supremumsnormtopologie versehen, und die Topologie des $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ ist die feinste lokalkonvexe Topologie, für welche alle $(j_K)_{K \in K(X)}$ stetig sind.

0.2.5. Kategorien Nvs_1 , Ban_1

a) Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Nvs_1 bzw.

Ban_1 , $\sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ die direkte Summe von X_α in Nvs_1 bzw. Ban_1 (mit Norm $\|x\| = \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|$) und $X^\infty = (\sum_{\alpha \in I} X_\alpha)/N$, wobei N der abgeschlossene Teilraum von $\sum_{\alpha \in I} X_\alpha$ ist, der mittels der Elemente

$$x_\alpha - f_{\beta\alpha}(x_\alpha) \text{ für } x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \leq \beta \in I \text{ und } f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X^\infty$$

die kanonischen Abbildungen erzeugt wird.

Dann ist $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Nvs_1 bzw. Ban_1 (siehe SEMADENI [1, 11.8.2(d)]).

b) Sind $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Nvs_1 bzw. Ban_1 ,

$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das 1_∞ -Produkt von X_α , X_∞ der lineare Teilraum von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, der aus allen $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ mit $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ besteht und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$ die Einschränkungen auf X_∞ von pr_α für $\alpha \in I$, so ist $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein projektiver Limes

von $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Nvs_1 und Ban_1 (siehe SEMADENI [1, 11.3, 11.8]).

0.2.6 Kategorie S_1

Es sei S_1 die Kategorie, deren Objekte die Paare $(X, (p_j)_{j \in J})$ sind - wobei X ein lokalkonvexer Raum ist und $(p_j)_{j \in J}$ eine Familie von Halbnormen, die die Topologie von X erzeugen - und deren Morphismen die linearen Abbildungen

$$f : (X, (p_j)_{j \in J}) \longrightarrow (Y, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$$

mit der folgenden Eigenschaft sind:

Für jede Halbnorm q_λ existiert eine Halbnorm p_j mit $p_j(f(x)) \leq q_\lambda(x)$; $x \in X$.

Wenn keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir statt $(X, (p_j)_{j \in J})$ einfach X .

Es sei weiter $(X_\alpha, (p_{\alpha, j_\alpha})_{j_\alpha \in J_\alpha})_{\alpha \in I}$ eine Familie von S_1 -Objekten,

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{ x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in X_\alpha, \sup_{\alpha \in I} p_{j_\alpha}(x_\alpha) < +\infty; j_\alpha \in J_\alpha \}$$

und die Abbildungen $p_j : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, definiert durch

$$p_j(x) := \sup_{\alpha \in I} p_{j_\alpha}(x_\alpha) ; j \in J := \prod_{\alpha \in I} J_\alpha, x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha, j_\alpha \in J_\alpha$$

Dann ist p_j eine Halbnorm auf $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ für jedes $j \in J$, und $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, (p_j)_{j \in J})$ ist ein S_1 -Objekt.

Es ist jetzt leicht zu zeigen, daß $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, (p_j)_{j \in J})$ das S_1 -Produkt von $(X_\alpha, (p_{\alpha, j_\alpha})_{j_\alpha \in J_\alpha})_{\alpha \in I}$ ist.

Sind weiterhin $((X_\alpha, (p_{\alpha, j_\alpha})_{j_\alpha \in J_\alpha}), f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in S_1 , $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, (p_j)_{j \in J})$ das S_1 -Produkt von

$(X_\alpha, (p_{\alpha, j_\alpha})_{j_\alpha \in J_\alpha})_{\alpha \in I}$, X_∞ der lokalkonvexe Teilraum von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, der aus allen $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ mit $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ besteht, und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$ die Einschränkungen auf X_∞ von pr_α für $\alpha \in I$, so ist offensichtlich

$((X_\alpha, (p_j)_{j \in J}), (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein S_1 -projektiver Limes von
 $((X_\alpha, (p_{\alpha, j_\alpha})_{j_\alpha \in J_\alpha}), (f_\alpha)_{\alpha \in I})$.

0.2.7 Kategorie $m-S_1$

Es sei X eine Algebra über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Eine lokal multiplikativ-konvexe Topologie (ab jetzt abgekürzt zu lokal m -konvexe Topologie) auf X ist eine lokalkonvexe Topologie auf dem linearen Raum X , die durch eine Familie $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Halbnormen p_α mit der Eigenschaft

$p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y)$ für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in I$ definiert ist.

X , versehen mit dieser Topologie, heißt eine lokal m -konvexe Algebra (siehe MICHAEL [4, 2.1]).

Es sei weiter $m-S_1$ diejenige Kategorie, deren Objekte die Paare $(X, (p_j)_{j \in J})$ - wobei X eine lokal m -konvexe Algebra ist, und $(p_j)_{j \in J}$ eine Familie von Halbnormen mit den oben beschriebenen Eigenschaften, die die Topologie von X erzeugen - und deren Morphismen diejenigen Alg-Morphismen

$$f : (X, (p_j)_{j \in J}) \longrightarrow (Y, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}),$$

die folgende Eigenschaft haben, sind:

Für jede Halbnorm q_λ existiert eine Halbnorm p_j mit
 $p_j(f(x)) \leq q_\lambda(x) ; \quad x \in X.$

Wenn keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir statt

$(X, (p_j)_{j \in J})$ einfach X .

Analog zu 0.2.6 konstruiert man den $m-S_1$ -projektiven Limes eines $m-S_1$ -projektiven Systems.

Die Unterkategorie von S_1 (bzw. $m-S_1$) mit Objekten diejenigen Paare $(X, (p_j)_{j \in J})$, deren Familie $(p_j)_{j \in J}$ aus einem Element besteht, wird durch s_1 (bzw. $m-s_1$) bezeichnet.

0.3 Bemerkungen

a) Spezielle Fälle eines induktiven Limes in jeder der in 0.2 genannten Kategorien sind:

i) die direkte Summe

ii) $(X/R, f)$ wobei $f : X \rightarrow X/R$ die kanonische Surjektion ist.

b) In jeder Kategorie ist das kartesische Produkt ein spezieller Fall eines projektiven Limes.

0.4 Definitionen

Es seien $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha})$, $(Y^\infty, (g_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (Y_\alpha, g_{\beta\alpha})$ (bzw. $(X_\infty, (\hat{f}_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, \hat{f}_{\beta\alpha})$, $(Y_\infty, (\hat{g}_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (Y_\alpha, \hat{g}_{\beta\alpha})$) ein einer Kategorie $\mathcal{K}$ und $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ (bzw. $(\hat{h}_\alpha)_{\alpha \in I}$) eine Familie von Morphismen $h_\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X_\alpha, Y_\alpha)$ (bzw. $\hat{h}_\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(\hat{Y}_\alpha, \hat{X}_\alpha)$) mit $h_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha} \circ h_\alpha$ (bzw. $\hat{h}_\beta \circ \hat{f}_{\beta\alpha} = \hat{g}_{\beta\alpha} \circ \hat{h}_\alpha$) für $\alpha \leq \beta \in I$. Dann heißt die Familie $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ (bzw. $(\hat{h}_\alpha)_{\alpha \in I}$) eine induktive (bzw. projektive) Familie von Morphismen in $\mathcal{K}$. Existiert ein $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\infty, Y^\infty)$ (bzw. $\hat{h} \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(Y_\infty, X_\infty)$) mit $h \circ f_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha$ (bzw. $\hat{h} \circ \hat{f}_\alpha = \hat{g}_\alpha \circ \hat{h}_\alpha$) für jedes $\alpha \in I$, so heißt h (bzw. $\hat{h}$) der induktive (bzw. projektive) Limes von $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ (bzw. $(\hat{h}_\alpha)_{\alpha \in I}$) in $\mathcal{K}$. In Zeichen:

$$h = \varinjlim_{\alpha \in I} h_\alpha \quad (\text{bzw. } \hat{h} = \varinjlim_{\alpha \in I} \hat{h}_\alpha) \text{ in } \mathcal{K}.$$

Schließlich wird vermerkt, daß alle in dieser Arbeit nicht ausdrücklich definierten Begriffe aus der allgemeinen Topologie im Sinn von DUGUNDJI [1] verwendet werden.

§ 1. Induktive Limiten von topologischen Räumen

Folgendes zeigt, daß die Eigenschaften: Metrisierbarkeit, Parakompaktheit, Normalität, perfekte Normalität, schwach perfekte Normalität (d.h.: jeder Punkt ist eine G_δ -Menge), Regularität, vollständige Regularität und T_1 -Eigenschaft sich von einem induktiven System auf seinen induktiven Limes in Top i.a. nicht übertragen.

1.1 Beispiel (vgl. 0.3 Bemerkung)

Es seien $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Topologie und $R \subseteq X \times X$ definiert durch:

$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in R :\Leftrightarrow (x_1 \geq 0 \text{ und } y_1 \geq 0) \text{ oder } (x_1 < 0 \text{ und } y_1 < 0).$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation und der Quotientenraum $Y = X/R$, der nach Bemerkung 0.3(ii) als ein induktiver Limes in Top betrachtet werden kann, besteht aus den Elementen

$a := \{(x, y) \in X \mid x \geq 0\}$ und $b := \{(x, y) \in X \mid x < 0\}$.

Bekanntlich hat Y die T_1 -Eigenschaft genau dann, wenn a und b abgeschlossen in X sind. b aber ist keine abgeschlossene Menge in X und deshalb hat Y die T_1 -Eigenschaft nicht. Daraus folgt, daß Y die anderen oben genannten Eigenschaften nicht hat.

Weiter werden hinreichende Bedingungen (wird eine hinreichende Bedingung) dafür angegeben, daß der induktive Limes von Hausdorffschen (normalen) Räumen wieder Hausdorffsch (normal) ist.

1.2 Lemma

Sind $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Top von regulären (bzw. normalen) Räumen, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ sein induktiver Limes

in Top und die kanonische Surjektion $f : \sum_{\alpha \in I} X_{\alpha} \longrightarrow X^{\infty}$ offen und abgeschlossen (bzw. abgeschlossen), so ist X^{∞} Hausdorffsch (bzw. normal).

Beweis:

Bekanntlich ist die topologische direkte Summe von regulären (bzw. normalen) Räumen regulär (bzw. normal). Weiter folgt die Behauptung des Lemmas aus 2.6 in DUGUNDJI [1, VII] (bzw. 15.4.c in WILLARD [1, Ch.5]).

1.3 Bemerkungen

- i) Es seien X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Die feinste Topologie auf Y , für welche f stetig ist, heißt die Identifizierungstopologie bezüglich f . Ist Y mit dieser Topologie versehen, so heißt f eine identifizierende Abbildung.

Es seien jetzt X und Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige surjektive Abbildung. Nach Theorem 7.2 in DUGUNDJI [1, VI] ist Y einem Quotientenraum isomorph in Top, falls f eine identifizierende Abbildung ist. Nach 1.4, wieder in DUGUNDJI [1, VI], ist jede stetige abgeschlossene (oder offene) Surjektion $f : X \longrightarrow Y$ eine identifizierende Abbildung.

Daraus und nach Bemerkung 0.3 a(ii) ist jedes Paar (Y, f) , wobei Y ein bei der Abbildung f stetiges abgeschlossenes (oder offenes) Bild eines topologischen Raumes X ist, der induktive Limes von (X, Y, f) in Top.

- ii) In WILLARD [1, Ch.5, 14.11 (a),(b)] wird durch Gegenbeispiele

gezeigt, daß das abgeschlossene (oder offene) stetige Bild eines vollständig regulären topologischen Raumes nicht Hausdorffsch zu sein braucht. Daraus und nach i) folgt, daß der induktive Limes von vollständig regulären Räumen i.a. kein Hausdorffscher Raum ist, selbst wenn die kanonische Surjektion (siehe 0.2.2) offen oder abgeschlossen ist.

iii) Die Voraussetzung in Lemma 1.2, daß die Abbildung f abgeschlossen ist, ist nicht notwendig, wie folgendes zeigt:

1.4 Beispiel

Es seien $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie, die 1-Sphäre $\mathbb{S}^1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definiert durch

$$f(x) := (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

und $R(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}$. Offensichtlich ist $(x, y) \in R(f)$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. f ist eine stetige offene surjektive Abbildung und deshalb (nach Bemerkung 1.3 i)) ist $(\mathbb{S}^1, f)$ der induktive Limes von $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, f)$ in Top. f ist offenbar keine abgeschlossene Abbildung.

In § 2 werden u.a. andere hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß der induktive Limes von normalen bzw. perfekt normalen bzw. parakompakten topologischen Räumen wieder normal bzw. perfekt normal bzw. parakompakt ist.

§ 2. Strikte induktive Limiten von topologischen Räumen

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine echt aufsteigende Folge von topologischen Räumen X_n mit den Topologien T_n entsprechend und es sei die durch T_{n+1} in X_n induzierte Topologie gleich T_n . Dann läßt sich in der Vereinigungsmenge X^∞ der X_n , folgendermaßen eine Topologie T einführen

$$T := \{ A \subseteq X^\infty \mid A \cap X_n \in T_n; n \in \mathbb{N} \}.$$

Die Topologie T ist die feinste Topologie in X^∞ , für welche jede Injektion $j_n : X_n \longrightarrow X^\infty$ ($n \in \mathbb{N}$) stetig ist.

Die Folge $(X_n, j_{mn})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$, wobei $j_{mn} : X_n \longrightarrow X_m$ für $n \leq m$ die kanonischen Injektionen sind, ist ein induktives System in Top, und heißt ein striktes induktives System in Top.

2.1 Lemma

Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X^∞ , j_n , T_n , T wie oben, Y ein topologischer Raum und $f : X^\infty \longrightarrow Y$ eine Abbildung. f ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $f \circ j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.

Der elementare Beweis soll hier nicht durchgeführt werden.

Offensichtlich erfüllt $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}})$ die Bedingungen I und II der kategoriellen Definition 0.1. $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}})$ heißt der strikte induktive Limes von $(X_n, j_{mn})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ in Top und wird durch

$\text{s.} \lim_{n \leq m \in \mathbb{N}} (X_n, j_{mn})$ bezeichnet. Falls keine Verwechslung möglich ist, wird X^∞ durch $\text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ bezeichnet.

T heißt der strikte induktive Limes von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wird durch $\text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} T_n$ bezeichnet.

2.2 Lemma

Es seien $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $T = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Dann gilt:

$$T \cap X_n = T_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Lemmas in loconv analog.

2.3 Lemma

Die T_1 -Eigenschaft ist bei der Bildung des strikten induktiven Limes in Top abgeschlossen.

Beweis mit Hilfe des Lemmas 2.2.

2.4 Definition (siehe MICHAEL [2, 8.1])

Es seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X . Man sagt, daß $\mathcal{A}$ den Raum X dominiert (oder X von $\mathcal{A}$ dominiert wird) genau dann, wenn jede Teilmenge A von X , die einen abgeschlossenen Durchschnitt mit jedem Element einer A überdeckenden Teilfamilie $\mathcal{A}_1$ von $\mathcal{A}$ hat, abgeschlossen ist.

2.5 Satz (MICHAEL [2, 8.2])

Ein topologischer Raum X ist parakompakt (bzw. normal bzw. perfekt normal) genau dann, wenn X von einer Familie parakompakter (bzw. normaler bzw. perfekt normaler) Teilräume dominiert wird.

2.6 Lemma

Es sei $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Top mit X_n abgeschlossen in X_{n+1} für

alle $n \in \mathbb{N}$. X^∞ ist parakompakt (bzw. normal bzw. perfekt normal) genau dann, wenn alle X_n parakompakt (bzw. normal bzw. perfekt normal) sind.

Beweis:

Es ist leicht zu zeigen, daß X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in X^∞ sind und daß die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Raum X^∞ dominiert. Daraus und nach Satz 2.5 folgt die Behauptung des Lemmas.

2.7 Bemerkungen.

- i) Es ist leicht zu zeigen, daß der Top-strikte induktive Limes von Lindelöfschen (bzw. separablen) Räumen X_n mit X_n abgeschlossen in X_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$ wieder Lindelöfsch (bzw. separabel) ist.
- ii) Sind $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Top und X_n abgeschlossen in X_{n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$, so stimmt die strikte induktive Limes Topologie auf X^∞ mit der schwachen Topologie, die von allen X_n auf X^∞ induziert wird, überein.

Der Beweis ist leicht.

Unter Benutzung des Dualitätssatzes von M. Stone wird folgendes bewiesen:

2.8 Satz

Sind $(X_n, f_{mn})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ in induktives System von kompakten null-dimensionalen Räumen mit f_{mn} für $n \leq m \in \mathbb{N}$ injektiv und X^∞ sein induktiver Limes in Top, so ist X^∞ wieder null-dimensional.

Zum Beweis des Satzes werden folgende Resultate von Dwinger über den induktiven Limes des induktiven Systems derjenigen kompakten

null-dimensionalen topologischen Räume, die zu den Booleschen Algebren eines projektiven Systems in Bool dual sind, benötigt:

Es seien $(B_n, g_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Bool, $X_n := B_n^*$ die Booleschen Räume von B_n für $n \in \mathbb{N}$ und g_{nm}^* die zu g_{nm} dualen Abbildungen. Dann ist offensichtlich $(X_n, g_{nm}^*)_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein induktives System in Top.

Es seien weiter a_n^* die zu $a_n \in B_n$ entsprechenden offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $a \rightarrow a^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ für $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ist ein Bool-Isomorphismus von $\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ auf die Algebra aller offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ (siehe DWINGER [1]). Es sei ferner $h : \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X^\infty$ die kanonische Surjektion. Die Abbildung $a \rightarrow a^{**}$ definiert durch $a^{**} := h(a^*)$ für jedes $a \in B_\infty$ ist nach DWINGER [2, Th.3] ein Bool-Isomorphismus von B_∞ auf eine Algebra von Teilmengen von X^∞ . Der Raum X , versehen mit der von der Familie $\{h(a^*) \mid a \in B_\infty\}$ als Basis für die offenen Mengen erzeugten Topologie, ist offensichtlich ein null-dimensionaler Raum. Außerdem wird die Abbildung $h : \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X^\infty$ bezüglich dieser Topologie stetig (siehe DWINGER [2, 4]).

2.9 Satz (siehe DWINGER [2, Th. 7 und Beweis])

Sind $(B_n, g_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System, $(B_\infty, (g_n)_{n \in \mathbb{N}})$ sein projektiver Limes in Bool, alle g_{nm} surjektiv, $(X_n, g_{nm}^*)_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ das induktive System der dualen Räume mit den dualen Abbildungen und X^∞ sein induktiver Limes in Ens, so stimmt die von der Familie $\{h(a^*) \mid a \in B_\infty\}$ als Basis für die offenen Mengen erzeugten Topologie mit der induktiven Limes Topologie überein.

Beweis des Satzes 2.8:

Es seien $B_n := X_n^*$ die zu X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ dualen Booleschen Algebren und f_{mn}^* die zu f_{mn} für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$ dualen Abbildungen (siehe HALMOS [2, §§ 17, 20]). Dann ist offensichtlich $(B_n, f_{mn}^*)_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Bool.

Sind weiter X_n^{**} der Boolesche Raum von B_n für $n \in \mathbb{N}$ und $f_{mn}^{**} := (f_{mn}^*)^*$ für $n \leq m \in \mathbb{N}$, so gilt:

$X_n^{**} \cong X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_{mn}^{**} = f_{mn}$ für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$ (siehe HALMOS [2, § 18, Th.7 und § 20, Th.8]).

Daraus folgt: $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n^{**} \cong X$ in Top.

Es seien jetzt $f : \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X^\infty$ die kanonische Surjektion und $B_\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Nach Theorem 8 in HALMOS [2, § 20] sind alle f_{mn}^* surjektiv. Daraus und nach Satz 2.9 ergibt sich, daß die von $\{f(a^*) \mid a \in B_\infty\}$ erzeugte Topologie mit der induktiven Limes Topologie auf X^∞ übereinstimmt. Hieraus und nach den Bemerkungen 2.7 folgt, daß der Top-induktive Limes X^∞ null-dimensional ist.

2.10 Bemerkung

Der Top-strikte induktive Limes von kompakten null-dimensionalen Räumen ist wieder null-dimensional.

2.11 Gegenbeispiel

Es seien $B_n = 2^n$ Objekte in Bool für $n \in \mathbb{N}$, $f_{nm} \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(B_n, B_m)$, f_{nm} surjektiv für $n \leq m \in \mathbb{N}$, $B_\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} B_n$ in Bool und $X^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} S(B_n)$ in Comp. Dann gilt: $B_\infty = 2^{\mathbb{N}}$ und $X^\infty = S(2^{\mathbb{N}})$ (siehe DWINGER [2, Th.7]). X^∞ ist kein zerstreuter Raum, während alle $S(B_n)$ solche sind.

Also ist der Comp-induktive Limes von zerstreuten Räumen i.a. kein solcher Raum.

Im Folgenden wird ein Gegenbeispiel dafür angegeben, daß der Top-strikte induktive Limes von kompakten (bzw. lokalkompakten) Räumen i.a. kein kompakter (bzw. lokalkompakter) Raum ist.

2.12 Gegenbeispiel

Genauer handelt es sich um den Begriff des CW-Komplexes (siehe CHRISTENSON, C.O.; VOXMAN, W.L. [1]).

Es seien $\mathcal{B}^n, \mathring{\mathcal{B}}^n, \mathcal{S}^n$ wie in den Bezeichnungen, $\mathcal{B}^0 := \mathring{\mathcal{B}}^0 := \{0\} \in \mathbb{R}, \mathcal{S}^{-1} := \emptyset$, X eine Menge und $H := \{ h_\alpha \mid h_\alpha : \mathcal{B}^{n_\alpha} \rightarrow X; \alpha \in I \}$ eine Familie von Abbildungen. Das Paar (X, H) heißt eine Zellenstruktur auf X , wenn die Familie H folgende Eigenschaften hat:

- i) $h_\alpha|_{\mathcal{B}^{n_\alpha}}$ sind injektiv für alle $\alpha \in I$
- ii) $\{ h_\alpha(\mathring{\mathcal{B}}^{n_\alpha}) \mid \alpha \in I \}$ ist eine Zerlegung von X
- iii) Ist $X^n := \bigcup_{n_\alpha \leq n} \mathcal{B}^{n_\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $h_\alpha(\mathcal{S}^{n_\alpha-1}) \subseteq X^{n_\alpha-1}$

Die Menge X^n , $n \in \mathbb{N}$, wird das n -Skeleton genannt.

Es seien weiter $X^{-1} = \emptyset$, $I_n := \{ \alpha \in I \mid n_\alpha = n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \text{ versehen mit der diskreten Topologie und die Abbildungen}$

$$p_n : (I_n \times \mathcal{B}^n) \cup X^{n-1} \xrightarrow{\quad} X^n; n \in \mathbb{N}_0$$

definiert durch

$$\begin{aligned} p_i(\alpha, b) &:= h_\alpha(b) \quad \text{für } (\alpha, b) \in I_i \times \mathcal{B}^i; i \in \mathbb{N}_0 \\ p_i(x) &= x \quad \text{für } x \in X^{i-1}; \quad i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Es sei ferner X^0 versehen mit der Quotiententopologie, die von p_0 induziert wird. Durch vollständige Induktion definiert man auf jedes X^n die Quotiententopologie, die von p_n induziert wird. Schließlich sei $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n$ versehen mit der schwachen Topologie, die von den Räumen X^n induziert wird. Der topologische Raum X , versehen mit dieser Topologie, heißt ein CW-Komplex. Wenn jede Abbildung p_n auf $I_n \times \mathcal{B}^{n_\alpha}$ eingeschränkt wird, dann kann X^n als der durch Zusammenkleben von $I_n \times \mathcal{B}^{n_\alpha}$ und X^{n-1} mittels $p_n|_{I_n \times \mathcal{B}^{n_\alpha}}$ entstandene Raum $(I_n \times \mathcal{B}^{n_\alpha}) \cup_{p_n|_{I_n \times \mathcal{B}^{n_\alpha}}} X^{n-1}$ angesehen werden. So ist X^{n-1} eine abgeschlossene Teilmenge von X^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aus der Definition eines CW-Komplexes und nach Bemerkung 2.7(ii) ergibt sich, daß der Raum X der Top-strikte induktive Limes von $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Die Räume X^n sind für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakte metrisierbare (also polnische) Räume. X ist i.a. weder polnisch noch kompakt oder lokal-kompakt (siehe CHRISTENSON, C.O.; VOXMAN, W.L. Th. 8.E.14 und Th. 8.E.18).

2.13 Bemerkung

Der Top-strikte induktive Limes von kompakten metrischen Räumen

(oder von polnischen Räumen, die abgeschlossene Teilmengen des strikten induktiven Limes sind) ist ein Lusin und Suslin Raum.

Beweis nach Lemma 2.6, Theorem 3 in SCHWARTZ [1, II, 1] und nach Korollar 2 zu Theorem 5 in SCHWARTZ [1, II, 1].

Für die Definition eines polnischen (bzw. Suslin bzw. Lusin) Raumes siehe SCHWARTZ [1, II, 1 Def. 1-3].

TEIL II: MASSTHEORETISCHE PROBLEME

Alle in diesem Teil nicht ausdrücklich definierten Begriffe aus der Maßtheorie (bzw. topologischen Maßtheorie) sind in HALMOS [1] (bzw. SCHWARTZ [1]) zu finden.

§ 3. Induktive Limiten von Maßräumen

Mit $\mathcal{M}$ wird die Kategorie, deren Objekte Maßräume $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und deren Morphismen $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (Y, \Sigma, \nu)$ meßbare maßverkleinernde (d.h.: $\mu \circ f^{-1} \leq \nu$) Abbildungen sind, bezeichnet.

Der Nachweis, daß $\mathcal{M}$ eine Kategorie ist, ist offenbar.

3.1 Existenz des induktiven Limes in der Kategorie $\mathcal{M}$

Mit dem Beweis der Existenz eines induktiven Limes in $\mathcal{M}$ wird hier die Konstruktion von VASILACH [1] eines induktiven Limes von Maßräumen korrigiert (siehe dazu VASILACH [2], [3], [4]).

3.1.1 Bemerkungen und Definitionen

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein induktives System in der Kategorie der meßbaren Räume und ihrer meßbaren Abbildungen

$$(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha}) \text{ in Ens und} \\ \mathcal{M} := \{ A \subseteq X^\infty \mid f_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{M}_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I \}.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{M}$ die größte σ -Algebra von Teilmengen von X^∞ , so daß f_α für alle $\alpha \in I$ $\mathcal{M}_\alpha$ - $\mathcal{M}$ -meßbar sind.

Es ist leicht zu zeigen, daß $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M})$ ein induktiver Limes in der oben genannten Kategorie ist.

$(X^\infty, \mathcal{M})$ heißt der induktive Limes von $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \in I}$ bezüglich der Abbildungen $f_{\beta\alpha}$ ($\alpha \leq \beta \in I$). Falls keine Verwechslung möglich ist, wird $(X^\infty, \mathcal{M})$ (bzw. $\mathcal{M}$) durch $\varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$ (bzw. $\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$) bezeichnet.

3.1.2 Satz

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein induktives System in $\mathcal{M}$ und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}_\alpha)$ wie in 3.1.1. Dann gilt:

- i) $\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(A) \leq \mu_\beta \circ f_\beta^{-1}(A); \alpha \leq \beta \in I, A \in \mathcal{M}$
- ii) Für jedes $A \in \mathcal{M}$ existiert der Limes

$$\lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(A) =: \mu(A) \text{ in } \overline{\mathbb{R}}_0^+$$
- iii) μ ist ein Maß auf $\mathcal{M}$.

Beweis:

- i) Seien $\alpha \leq \beta \in I$ und $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(A) = \mu_\alpha \circ f_{\beta\alpha}^{-1} \circ f_\beta^{-1}(A) \leq \mu_\beta \circ f_\beta^{-1}(A)$$
- ii) I ist eine aufsteigend filtrierende Menge.
 Daraus und nach i) folgt, daß der Limes $\mu(A) := \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(A)$ für $A \in \mathcal{M}$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}_0^+$.
- iii) Aus der Definition der Abbildung μ und aus der Nichtnegativität der Maße μ_α ; $\alpha \in I$ folgt die Nichtnegativität von μ .

Es bleibt nur die σ -Additivität von μ zu beweisen.

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise fremder meßbarer Teilmengen von X^∞ . Dann gilt:

$$f_\alpha^{-1}(A_n) \cap f_\alpha^{-1}(A_m) = \emptyset \text{ für } n \neq m \in \mathbb{N}, \alpha \in I \text{ und}$$

$$\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu_\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_\alpha^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(A_n) \quad (1).$$

Behauptung:

$$\lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n).$$

Beweis:

Die Relation

$$\lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \quad (2)$$

ist offenbar.

$$\text{Sei } \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) =: k$$

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < k$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) &\geq \lim_{\alpha \in I} \sum_{n=1}^N \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) = \\ &= \sum_{n=1}^N \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \geq \lambda \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \geq \lambda \quad \text{für jedes } \lambda < k.$$

Daraus ergibt sich die Relation:

$$\lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \geq k := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) \quad (3)$$

Nach (2) und (3) folgt die Behauptung.

Hieraus gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) := \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{\alpha \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n),$$

wegen der Relation (1).

Daraus und nach der Behauptung ergibt sich:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(A_n) =: \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3.1.3 Lemma

Es seien $(X_{\alpha}, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_{\alpha}, \mu_{\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in $\mathcal{M}$ und $(X^{\infty}, (f_{\alpha})_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ wie in Satz 3.1.2. Dann gilt:

Für jedes Objekt (Y, Σ, v) in $\mathcal{M}$ und für jede Familie $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Morphismen $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ in $\mathcal{M}$ mit $g_\beta \circ f_\beta \alpha = g_\alpha$ für $\alpha \leq \beta \in I$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : X^\infty \rightarrow Y$, so daß: $g \circ f_\alpha = g_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$.

Beweis:

Nach Definition eines induktiven Limes in $\mathbf{Ens}$ existiert genau eine Abbildung $g : X^\infty \rightarrow Y$ mit $g \circ f_\alpha = g_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ (i). Offensichtlich ist g $\mathcal{M}$ - Σ -meßbar.

Wegen der Relation $\mu_\alpha \circ g_\alpha^{-1} \leq v$ für alle $\alpha \in I$ und nach Satz

3.1.2 gilt:

$$\mu \circ g^{-1}(A) = \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1} \circ g^{-1}(A) \stackrel{(i)}{=} \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha \circ g_\alpha^{-1}(A) \leq v(A)$$

für alle $A \in \Sigma$.

Also ist g ein Morphismus in $\mathcal{M}$.

Nach Satz 3.1.2 und nach Lemma 3.1.3 folgt:

3.1.4 Satz

Für jedes induktive System $(X_\alpha, f_\beta \alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{M}$ existiert sein induktiver Limes $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ in $\mathcal{M}$.

3.1.5 Bemerkungen und Definitionen

(i) Der Maßraum $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ (bzw. das Maß μ) wird der $\mathcal{M}$ -induktive Limes von $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ (bzw. $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$) bezüglich der Morphismen $f_\beta \alpha$ für $\alpha \leq \beta \in I$ genannt. Falls keine Verwechslung möglich ist, wird $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ (bzw. μ) durch $\lim_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ (bzw. $\lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha$) bezeichnet.

ii) Es kann leicht durch Gegenbeispiele bewiesen werden, daß der $\mathcal{M}$ -induktive Limes von endlichen Maßen i.a. kein end-

liches oder σ -endliches Maß ist. Wenn $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ gleichmäßig beschränkt ist, dann ist offensichtlich μ endlich.

iii) μ ist das kleinste Maß auf $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1} \leq \mu$ für alle $\alpha \in I$.

3.2 Spezielle Fälle eines induktiven Limes in $\mathcal{M}$.

3.2.1

Es seien X^∞ die Vereinigung einer monoton aufsteigenden Familie $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Mengen, wobei I eine aufsteigend filtrierende Menge von Indexen ist, und $j_{\beta\alpha}; \alpha \leq \beta \in I$ (bzw. $j_\alpha; \alpha \in I$) die kanonischen Injektionen von X_α nach X_β (bzw. von X_α nach X^∞).

Nach Bemerkung 0.2.1.1 ist $(X_\alpha, j_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in Ens und $(X^\infty, (j_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, j_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Ens.

Sei weiterhin die Familie $(X_\alpha, j_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) $\mathcal{M}_\alpha$ ist eine σ -Algebra von Teilmengen von X_α für jedes $\alpha \in I$.
- ii) $j_{\beta\alpha}$ ist $\mathcal{M}_\alpha$ - $\mathcal{M}_\beta$ -meßbar für alle $\alpha \leq \beta \in I$
- iii) $X_\alpha \in \mathcal{M}_\beta$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$
- iv) $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist eine Familie von Maßen μ_α auf $\mathcal{M}_\alpha$ mit $\mu_\beta|_{\mathcal{M}_\alpha} = \mu_\alpha$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$

Dann sind offensichtlich $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, wobei

$\mathcal{M} := \{A \subseteq X^\infty \mid A \cap X_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \text{ für jedes } \alpha \in I\}$ und

$\mu(A) := \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha(A \cap X_\alpha)$ für alle $A \in \mathcal{M}$, $(X_\alpha, j_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in $\mathcal{M}$ und $(X^\infty, (j_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ ein induktiver Limes von $(X_\alpha, j_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ in $\mathcal{M}$.

Das Maß μ ist das kleinste Maß auf $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft

$\mu|_{\mathcal{M}_\alpha} = \mu_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$.

3.2.2 Strikter induktiver Limes in $\mathcal{M}$.

Es seien X die Vereinigung einer echt aufsteigenden Folge

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen und $(X_n, j_{mn}, \mathcal{M}_n, \mu_n)_{n \leq m \in \mathbb{N}}$

$(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{M}, \mu)$ wie in 3.2.1.

Dann sind offensichtlich $(X_n, j_{mn}, \mathcal{M}_n, \mu_n)_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein induktives System in $\mathcal{M}$ und $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{M}, \mu)$ ein induktiver Limes in $\mathcal{M}$.

Der Maßraum $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ heißt der strikte induktive Limes von

$(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

In Zeichen:

$$(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) := \text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$$

3.2.3 Direkte Summe in $\mathcal{M}$.

3.2.3.1 Definition (siehe FREMLIN [1, 61 G])

Es seien $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine indizierte Familie von Maßräumen und $X := \{ (t, \alpha) \mid t \in X, \alpha \in I \}$ die disjunkte Vereinigung von

$(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ (in Zeichen $X := \sum_{\alpha \in I} X_\alpha$). Für $E \subseteq X$ und $\alpha \in I$ sei

$$E_\alpha := \{ t \mid (t, \alpha) \in E \} \subseteq X_\alpha.$$

Es seien ferner

$$\mathcal{M} := \{ E \subseteq X \mid E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \text{ für jedes } \alpha \in I \} \text{ und}$$

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+ \text{ definiert durch } \mu(E) := \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha(E_\alpha).$$

Es ist leicht zu zeigen, daß $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum ist, die

so genannte direkte Summe von $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$.

3.2.3.2 Bemerkungen

- 1) Die Abbildungen $t \longrightarrow (t, \alpha)$; $\alpha \in I$ von X_α nach X sind Einbettungen und $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist eine Zerlegung von X . Eine Menge

$E \in \mathcal{X}$ gehört zu $\mathcal{M}$ genau dann, wenn

$$E_\alpha = E \cap X_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(X_\alpha) \text{ für jedes } \alpha \in I,$$

und in diesem Fall gilt

$$\mu(E) = \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha(E \cap X_\alpha).$$

ii) Seien $(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)_{t \in T}$ eine Familie von Maßräumen und I die Menge aller endlichen Teilmengen von T . Für $\alpha \in I$

$$\text{sei } X_\alpha := \sum_{t \in \alpha} X_t,$$

$$\mathcal{M}_\alpha = \{ E_\alpha \mid E_\alpha \subseteq X_\alpha, E_\alpha \cap X_t \in \mathcal{M}_t; \text{ für alle } t \in \alpha \} \text{ und}$$

$$\mu_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+ \text{ definiert durch } \mu_\alpha(E_\alpha) := \sum_{t \in \alpha} \mu_t(E_\alpha \cap X_t).$$

Die Familie $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist ein induktives System dessen induktiver Limes mit der direkten Summe von $(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)_{t \in T}$ identifiziert werden kann.

3.3 Induktive Limiten von topologischen Maßräumen

3.3.1 Definitionen und Bemerkungen

i) Ein Tripel $(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt ein topologischer Maßraum, falls X ein topologischer Raum, $\mathcal{M}$ eine σ -Algebra von Teilmengen von X , die alle offenen Teilmengen enthält, und μ ein Maß auf $\mathcal{M}$ sind.

ii) Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein topologischer Hausdorffscher Maßraum. Das Maß μ heißt ein Radon-Maß, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) μ ist lokal endlich (d.h.: jeder Punkt von X hat eine Umgebung, die ein endliches Maß hat).

b) μ ist inner regulär (d.h.: für jedes $B \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq B, K \in \mathcal{K}(X) \}$$

iii) Ein topologischer Maßraum $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ heißt ein Radon-Raum, falls jedes endliche Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ein Radon-Maß ist.

iv) Es sei $\mathcal{M}_{\text{top}}$ die Kategorie, deren Objekte topologische Maßräume $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sind und deren Morphismen $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (Y, \Sigma, \nu)$ stetige, meßbare, maßverkleinernde Abbildungen sind. Es seien ferner $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in $\mathcal{M}_{\text{top}}$, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ der Ens-induktive Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ versehen mit den maßtheoretischen und topologischen Strukturen der entsprechenden induktiven Limiten. Dann ist $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ der induktive Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$.

3.3.2 Bemerkung

Es seien $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ der Top-induktive Limes von $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$, $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{B}(X_\alpha))_{\alpha \leq \beta \in I}$ das induktive System der meßbaren Räume $(X_\alpha, \mathcal{B}(X_\alpha))$ für $\alpha \in I$ und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M})$ sein induktiver Limes. Offenbar gilt

$$\mathcal{B}_0(X^\infty) \subseteq \mathcal{B}(X^\infty) \subseteq \mathcal{M}.$$

Im Folgenden wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß $\mathcal{B}(X^\infty) = \mathcal{M}$ ist.

3.3.3 Satz

Sind X^∞ der Top-strikte induktive Limes von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(X^\infty, \mathcal{M})$ der induktive Limes von $(X_n, \mathcal{B}(X_n))$, so gilt

$$\mathcal{B}(X^\infty) = \mathcal{M}$$

Beweis:

Nach Bemerkung 3.3.2 gilt

$$\mathcal{B}(X^\infty) \subseteq \mathcal{M} \tag{i}$$

Andererseits gilt

$$\mathcal{M} \cap X_n \subseteq \mathcal{B}(X_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{ii}$$

Nach Lemma 2.2 gehört jede offene Teilmenge von X_n zu

$\mathcal{B}(X^\infty) \cap X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus und nach (ii) folgt die Relation

$$\mathcal{B}(X_n) \subseteq \mathcal{B}(X^\infty) \cap X_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{iii})$$

Nach (ii) und (iii) ergibt sich

$$\mathcal{B}(X_n) = \mathcal{M} \cap X_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (\text{iv})$$

Daraus und nach (i) folgt

$$\mathcal{B}(X^\infty) \cap X_n \subseteq \mathcal{B}(X_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit und nach (iii) ergibt sich

$$\mathcal{B}(X^\infty) \cap X_n = \mathcal{B}(X_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus und nach (iv) folgt

$$\mathcal{B}(X^\infty) \cap X_n = \mathcal{M} \cap X_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und deshalb gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(X^\infty)$.

Daraus und nach (i) folgt:

$$\mathcal{B}(X^\infty) = \mathcal{M}.$$

3.3.4 Korollar

Sind $X^\infty = \text{s.}\lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Top, X_n perfekt normal und abgeschlossen in X^∞ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{M} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(X_n)$, so gilt

$$\mathcal{B}_0(X^\infty) = \mathcal{B}(X^\infty) = \mathcal{M}.$$

Beweis:

Nach Lemma 2.6 und nach Satz 3.3.3.

3.3.5 Bemerkung

Die innere Regularität von Maßen bleibt bei der Bildung des induktiven Limes in $\mathcal{M}_{\text{top}}$ erhalten.

Der $\mathcal{M}_{\text{top}}$ -induktive Limes von Radon-Maßen ist aber i.a. kein

Radon-Maß, weil, wie folgendes besagt, die Lokalendlichkeit eines inner regulären Maßes sich von einem induktiven System auf den induktiven Limes in $\mathcal{M}_{\text{top}}$ i.a. nicht überträgt.

3.3.6. Beispiel

Folgendes Beispiel eines inner regulären Maßes, welches als der induktive Limes von Radon-Maßen betrachtet werden kann und nicht lokal endlich ist, findet man durch BOURBAKI [3, I, § 4.ex.9, §7.ex.6, § 9.ex.4].

Es sei $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, versehen mit einer Topologie, die durch

$$\left\{ \bigcap_{i \in \mathbb{R}} U_i \mid \text{höchstens abzählbar viele } U_i \neq \mathbb{N} \right\},$$

als Basis definiert wird. Dann ist X ein regulärer topologischer Raum und jede kompakte Teilmenge von X ist endlich.

Betrachte jetzt die Familie $(X_A, 1_{BA})_{A \subseteq B \in K(X)}$ mit $X_A = X$ für alle $A \in K(X)$ und $1_{BA} = 1_X$ für alle $A \subseteq B \in K(X)$. Dann ist

$(X_A, 1_{BA})_{A \subseteq B \in K(X)}$ ein induktives System in Top und $(X, (1_A)_{A \in K(X)})$ ist sein induktiver Limes in Top .

Es sei weiter eine Familie $(\mu_K)_{K \in K(X)}$ von Maßen

$\mu_K : \mathcal{B}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definiert durch

$$\mu_K(A) = \text{card}(A \cap K) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(X); \quad K \in K(X).$$

Die Familie $(X_A, 1_{BA}, \mathcal{B}(X_A), \mu_A)_{A \subseteq B \in K(X)}$ ist offenbar ein induktives System in $\mathcal{M}_{\text{top}}$, und alle Maße μ_A sind Radon-Maße.

Das Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ definiert durch $\mu(A) = \lim_{K \in K(X)} \mu_K(A)$, welches der induktive Limes der Radon-Maße μ_K ist, ist kein lokal endliches Maß.

3.3.7 Bemerkungen

- i) Ist $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ der induktive Limes der Maßräume $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ für $\alpha \in I$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$, wobei $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine aufsteigende Familie von offenen Teilmengen von X^∞ ist (siehe 3.2.1), und sind alle Maße μ_α Radon-Maße, so ist μ wieder ein Radon-Maß.
- Spezieller Fall des oben genannten induktiven Limes ist die direkte Summe von Maßräumen $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit allen Maßen μ_α als Radon-Maßen.
- ii) Es sei noch bemerkt, daß der induktive Limes von Radon-Räumen i.a. kein Radon-Raum ist. Folgendes Beispiel dafür findet man durch SCHWARTZ [1, Seite 30].

3.3.8 Beispiel

Es seien $Y = [0, 1]$ versehen mit dem Lebesgueschen Maß λ , X eine nicht Lebesgue-meßbare Teilmenge von Y mit $\lambda^*(X) = 1$ oder $\lambda_*(Y \setminus X) = 0$ (λ^* bzw. λ_* ist das äußere bzw. innere Maß) und

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(Y) \cap X.$$

Definiere ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ folgendermaßen:

Für $B \in \mathcal{B}(X)$ sei $\mu(B) := \lambda(B')$ für jedes $B' \in \mathcal{B}(Y)$ mit $B' \cap X = B$. μ ist endlich und folglich lokal endlich. μ erfüllt aber die innere Regularität nicht.

Der Raum X ist als metrischer Raum ein k -Raum (siehe DUGUNDJI [1, XI, 9.3] und deshalb isomorph zu dem induktiven Limes aller seiner kompakten Teilmengen in Top . Jede kompakte Teilmenge von X ist als kompakter metrischer Raum ein Radon-Raum, X aber nicht.

§ 4. Induktive und projektive Limiten von L^p -Räumen

Hier wird die Beziehung zwischen den Räumen $L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ bzw. $L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ eines induktiven Systems von Maßräumen $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ und dem Raum $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ bzw. $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ seines induktiven Limes untersucht. Unter anderem wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß ein zu Theorem 2.9 in DUGUNDJI [1, Seite 433] für die Räume $C(X)$ entsprechendes Resultat i.a. nicht für die Räume $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ bzw. $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ gilt. Folgende Definitionen sind in HALMOS [1] zu finden:

4.1 Definitionen

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, die endlich viele Werte annimmt, heißt eine Treppenfunktion. Offenbar kann der Definitionsbereich X einer Treppenfunktion f stets als endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen X_i dargestellt werden, wobei f auf X_i dann jeweils nur einen festen Wert a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) annimmt. Daraus ergibt sich die Relation:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{X_i}(x); \quad x \in X$$

Eine Treppenfunktion $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{X_i}$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt integrierbar, wenn $\mu(X_i) < +\infty$ für jeden Index i mit $a_i \neq 0$ gilt.

Das Integral von f , in Zeichen

$$\int f(x) d\mu(x) \quad \text{oder} \quad \int f d\mu$$

ist durch

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(X_i)$$

definiert.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Treppenfunktionen heißt Cauchy-Folge im Mittel, falls $\int |f_n - f_m| d\mu$ gegen 0 für $n, m \rightarrow +\infty$ konvergiert.

Eine Funktion f auf X heißt fast überall (= f..) endlich, falls die Menge $\{x \in X \mid |f(x)| = +\infty\}$ eine Nullmenge ist.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ f.. endlicher meßbarer Funktionen auf X heißt dem Maße μ nach konvergent gegen eine meßbare Funktion f , falls für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ die Relation

$$\lim_n \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Eine f.. endliche meßbare Funktion f auf X heißt integrierbar, falls eine Cauchy im Mittel Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer Treppenfunktionen f_n auf X existiert, die dem Maße μ nach gegen f konvergiert. Eine Funktion f auf X heißt p -fach integrierbar ($1 \leq p < +\infty$), wenn sie meßbar ist und wenn $|f|^p$ integrierbar ist.

4.2 Satz

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ sein induktiver Limes in $\mathcal{M}$.

Dann ist die Familie $(\mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), h_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei die Abbildungen $h_{\alpha\beta} : \mathcal{L}^1(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta) \rightarrow \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ durch

$h_{\alpha\beta}(u_\beta) := u_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ für $u_\beta \in \mathcal{L}^1(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ definiert sind, ein projektives System in der Kategorie s_I^- und in Vectlat, und es gilt:

$$a) \quad \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \quad \text{in Vectlat}$$

$$b) \quad \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \quad \text{in } s_1$$

Um diesen Satz beweisen zu können, brauchen wir folgendes:

4.3 Lemma

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in $\mathcal{M}$ und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ sein $\mathcal{M}$ -induktiver Limes. Dann gilt:

- a) $\|g\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|g \circ f_\alpha\|_p$ für jedes $g \in \mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $1 \leq p \leq +\infty$
- b) Für jedes induktive System $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Funktionen mit $g_\alpha \in \mathcal{L}^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ und $\sup_{\alpha \in I} \|g_\alpha\|_p < +\infty$, $\alpha \in I$ und $1 \leq p \leq +\infty$, existiert genau eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $g \circ f_\alpha = g_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$, und mit $\|g\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|g_\alpha\|_p$.

Beweis:

Dem Beweis von a) und b) schicken wir folgendes voraus:

Behauptung 1:

Ist u eine meßbare Funktion von X^∞ nach $\mathbb{R}_0^+$, so gilt:

$$\int_{X^\infty} u \, d\mu = \lim_{\alpha \in I} \int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha \, d\mu_\alpha.$$

Beweis:

Es sei u eine meßbare positive Funktion auf X^∞ . Es existiert eine monoton steigende Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$u = \lim_{m \in \mathbb{N}} u_m.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt sich:

$$\int_{X^\infty} u \, d\mu = \lim_{m \in \mathbb{N}} \int_{X^\infty} u_m \, d\mu \quad (1)$$

Offensichtlich gilt Behauptung 1 für jede charakteristische Funktion auf X^∞ und folglich gilt sie für jede Treppenfunktion auf X^∞ .

Hieraus und nach (1) folgt:

$$\int_{X^\infty} u d\mu = \lim_{m \in \mathbb{N}} \lim_{\alpha \in I} \int_{X_\alpha} u_m \circ f_\alpha d\mu_\alpha \leq \lim_{\alpha \in I} \int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha d\mu_\alpha \quad (ii)$$

Nach dem Integraltransformationssatz folgt:

$$\int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha d\mu_\alpha = \int_{X^\infty} u d\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1} \quad \text{für jedes } \alpha \in I.$$

Daraus, nach (ii) und nach Satz 3.1.2 ergibt sich:

$$\int_{X^\infty} u d\mu \leq \lim_{\alpha \in I} \int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha d\mu_\alpha \leq \int_{X^\infty} u d\mu, \quad \text{oder:}$$

$$\int_{X^\infty} u d\mu = \lim_{\alpha \in I} \int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha d\mu_\alpha.$$

a) Wir unterscheiden die Fälle: $1 \leq p < +\infty$ und $p = +\infty$

Erster Fall: $1 \leq p < +\infty$

Es sei $g \in \mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $u := |g|^p$.

Nach Behauptung 1 folgt sofort:

$$\|g\|_p^p = \lim_{\alpha \in I} \|g \circ f_\alpha\|_p^p$$

Zweiter Fall: $p = +\infty$

Für jedes $\alpha \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha(\{x_\alpha \in X_\alpha : |g \circ f_\alpha|(x_\alpha) > \|g\|_\infty\}) = \\ &= \mu_\alpha(\{x_\alpha \in X_\alpha : |g|(f_\alpha(x_\alpha)) > \|g\|_\infty\}) = \\ &= \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(\{x \in X^\infty : |g|(x) > \|g\|_\infty\}) \leq \\ &\leq \mu(\{x \in X^\infty : |g|(x) > \|g\|_\infty\}) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sup_{\alpha \in I} \|g \circ f_\alpha\|_\infty \leq \|g\|_\infty \quad (iii)$$

Sei weiter ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha(\{x_\alpha \in X_\alpha : |g \circ f_\alpha|(x_\alpha) > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) = \\ &= \lim_{\alpha \in I} \mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(\{x \in X^\infty : |g|(x) > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) = \\ &= \mu(\{x \in X^\infty : |g|(x) > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0. \end{aligned}$$

Also gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\alpha \in I$, so daß:

$$\mu_\alpha(\{x_\alpha \in X_\alpha : |g \circ f_\alpha|(x_\alpha) > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0.$$

Daraus folgt:

$$\|g\|_{\infty} \leq \sup_{\alpha \in I} \|g \circ f_{\alpha}\|_{\infty} \quad (\text{iv})$$

Nach (iii) und (iv) folgt:

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{\alpha \in I} \|g \circ f_{\alpha}\|_{\infty} \quad \text{für jedes } g \in \mathcal{L}^{\infty}(X^{\infty}, \mathcal{M}, \mu).$$

b) Erster Fall: $1 \leq p < +\infty$

Es sei $(g_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ein induktives System von p -fach integrierbaren Funktionen mit $\sup_{\alpha \in I} \|g_{\alpha}\|_p < +\infty$

Dann existiert genau eine meßbare Funktion g auf X^{∞} mit

$$g = \lim_{\alpha \in I} g_{\alpha}.$$

Die Funktion $u := |g|^p$ ist eine meßbare Funktion von X^{∞} nach $\overline{\mathbb{R}}_0^+$. Daraus und nach Behauptung 1 gilt:

$$g \in \mathcal{L}^p(X^{\infty}, \mathcal{M}, \mu) \quad \text{und} \quad \|g\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|g_{\alpha}\|_p.$$

Zweiter Fall: $p = +\infty$

Es sei $(g_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ein induktives System von Funktionen

$g_{\alpha} \in M(X_{\alpha}, \mathcal{M}_{\alpha}, \mu_{\alpha})$ mit $\sup_{\alpha} \|g_{\alpha}\| < +\infty$. Dann existiert genau eine meßbare Funktion $g : X^{\infty} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ mit $g = \lim_{\alpha \in I} g_{\alpha}$.

Daraus und analog zum Beweis von a) (Zweiter Fall) folgt:

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{\alpha \in I} \|g_{\alpha}\|_{\infty} \quad \text{und} \quad g \in M(X^{\infty}, \mathcal{M}, \mu).$$

Beweis des Satzes 4.2:

) Behauptung 1:

Die Abbildungen $h_{\alpha\beta}$ sind wohldefiniert für alle $\alpha \leq \beta \in I$.

Beweis:

Es sei $u_\beta \in \mathcal{L}^1(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ für ein $\beta \in I$. Dann existiert eine Folge integrierbarer, Cauchy im Mittel Treppenfunktionen $u_{\beta,n}$; $n \in \mathbb{N}$, so daß $(u_{\beta,n})_{n \in \mathbb{N}}$ dem Maße μ_β nach gegen u_β konvergiert. Für jede Funktion $u_{\beta,n}$ gilt:

$$u_{\beta,n}(x_\beta) = \begin{cases} a_i; & \text{falls } x_\beta \in E_{\beta,i} \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, k\} \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $E_{\beta,i}$ paarweise disjunkte meßbare Teilmengen von X_β sind. Es ist offenbar, daß die Folge $(u_{\beta,n} \circ f_{\beta\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ aus integrierbaren meßbaren Treppenfunktionen auf X_α besteht, und jedes $u_{\beta,n} \circ f_{\beta\alpha}$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$u_{\beta,n} \circ f_{\beta\alpha}(x_\alpha) = \begin{cases} a_i; & \text{falls } x_\alpha \in f_{\beta\alpha}^{-1}(E_{\beta,i}) \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, k\} \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

Andererseits ist $(u_{\beta,n} \circ f_{\beta\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ eine Cauchy-Folge im Mittel, und sie konvergiert dem Maße μ_α nach gegen $u_\beta \circ f_{\beta\alpha}$.

Also gilt: $u_\beta \circ f_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$ und damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Weiter ist es leicht zu zeigen, daß die Familie

$(\mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), h_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in s_1 und in Vectlat

Es seien $(K, (h_\alpha)_{\alpha \in I}) = \lim_{\alpha \in I} (\mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha, h_{\alpha\beta})$ in Vectlat und die Abbildungen $w_\alpha : \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ für alle $\alpha \in I$ definiert durch

$$w_\alpha(u) := u \circ f_\alpha \quad \text{für } \alpha \in I \text{ und } u \in \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu).$$

Die Abbildungen w_α sind wohldefinierte Morphismen in s_1 und in Vectlat, und offensichtlich gilt:

$$h_{\alpha\beta} \circ w_\beta = w_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \leq \beta \in I.$$

Daraus und nach Proposition 1 in BOURBAKI [2, III, 7.2] folgt, daß genau eine Abbildung $w : \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow K$ existiert mit $w = \varinjlim_{\alpha \in I} w_\alpha$ (d.h.: $w_\alpha = h_\alpha \circ w$ für jedes $\alpha \in I$). Es ist leicht zu zeigen, daß die Abbildung w ein Morphismus in Vectlat ist.

Behauptung 2:

w ist injektiv

Beweis:

Es seien $u, u' \in \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $w(u) = w(u')$.

Dann gilt: $h_\alpha(w(u)) = h_\alpha(w(u'))$ für jedes $\alpha \in I$,

oder $w_\alpha(u) = w_\alpha(u')$ für jedes $\alpha \in I$,

oder $u \circ f_\alpha = u' \circ f_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$,

oder $u = u'$.

) Es existiert genau ein s_1 -Morphismus $w_1 : \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow L$ - wobei $(L, (h'_\alpha)_{\alpha \in I}) := (\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), h_{\alpha\beta})$ in s_1 mit $w_1 = \varinjlim_{\alpha \in I} w_\alpha$ (vgl. 0.1 Definition).

Es seien weiter $t = (g_\alpha) \in L$ und eine Abbildung $g_t : X^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$

definiert durch $g_t(x) := g_\alpha(x_\alpha)$ für $x = f_\alpha(x_\alpha)$, $\alpha \in I$.

Nach Lemma 4.3 b) folgt: $g_t \in \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$

Sei ferner die Abbildung $G : L \longrightarrow \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ definiert durch

$G(t) := g_t$ für $t \in L$.

Dann gilt: $G \circ w_1 = \text{id}_{\mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)}$ und $w_1 \circ G = \text{id}_L$, woraus folgt, daß die Abbildungen G und w_1 bijektiv sind.

Behauptung 3:

Die Abbildung G ist ein s_1 -Morphismus.

Beweis:

Sei $t = (g_\alpha)_{\alpha \in I} \in L$. Dann gilt:

$$\|G(t)\|_p = \|g_t\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|g_\alpha\|_p \text{ nach Lemma 4.3 a).}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \|G_t\|_p &= \sup_{\alpha \in I} \|g_t \circ f_\alpha\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|w_\alpha(g_t)\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|h'_\alpha w_1(g_t)\|_p \leq \\ &\leq \|w_1(g_t)\| = \|w_1 \circ G(t)\| = \|t\|. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\|G(t)\|_p \leq t \quad \text{für jedes } t \in L.$$

Damit ist Behauptung 3 bewiesen.

4.4 Bemerkung

Durch ein Gegenbeispiel wird im folgenden bewiesen, daß die Räume $\mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $\varinjlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^1(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ i.a. nicht Vectlat-isomorph sind. Dem Gegenbeispiel schicken wir folgendes Resultat voraus, dessen Beweis analog zu dem von Satz 4.2 und leichter ist als er.

4.5 Proposition

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System von meßbaren Räumen $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$; $\alpha \in I$, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M})$ sein induktiver Limes und $\mathcal{F}(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$; $\alpha \in I$ (bzw. $\mathcal{F}(X^\infty, \mathcal{M})$) die Menge aller $\mathcal{M}_\alpha$ - (bzw. $\mathcal{M}$ -)meßbaren Funktionen auf X_α ; $\alpha \in I$ (bzw. X^∞).

Dann ist die Familie $(\mathcal{F}(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha), g_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei $g_{\alpha\beta}$ durch $g_{\alpha\beta}(u_\beta) := u_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ für $u_\beta \in \mathcal{F}(X_\beta, \mathcal{M}_\beta)$ definiert ist,

ein projektives System in Ens und es gilt:

$$\mathcal{F}(X^\infty, \mathcal{M}) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{F}(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha).$$

4.6 Gegenbeispiel

Es seien $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Intervalle der Gestalt

$X'_n := \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wieder eine Folge reeller Intervalle, die folgendermaßen konstruiert wird:

$X_1 := X'_1$ und $X_n := X_{n-1} \cup X'_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$X^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, λ (bzw. λ_n) das Lebesguesche Maß auf

X^∞ (bzw. X_n) und $(X^\infty, \mathcal{M}, \lambda)$ der strikte induktive Limes der Maßräume $(X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\lambda_n}, \lambda_n)$; $n \in \mathbb{N}$.

Es seien ferner $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $\hat{f}_n : X'_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\hat{f}_n(x) = n+1$ für $x \in X'_n$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen konstruiert:

$$f_1 := f'_1 \text{ und } f_n(x) := \begin{cases} f_{n-1}(x) & \text{falls } x \in X_{n-1} \\ \hat{f}_n(x) & \text{falls } x \in X_n \setminus X_{n-1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein induktives System von meßbaren Funktionen und die Funktion $f : X^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = n+1$ für alle $x \in X'_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist der induktive Limes von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Weiter gilt

$$\int_{X_n} f_n d\lambda_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und deshalb}$$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^1(X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\lambda_n}, \lambda_n) \quad (i)$$

Andererseits gilt

$$\int_X f d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \quad \text{und folglich}$$

$$f \notin \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{B}(X^\infty)_\lambda, \lambda) \quad (ii)$$

Aus der Definition des induktiven Limes in $\mathcal{M}$ ist $\mathcal{B}(X^\infty) \subseteq \mathcal{M}$,
und $\hat{\lambda}$ fällt auf $\mathcal{B}(X^\infty)_\lambda$ mit λ zusammen. Hieraus und nach (ii)
ergibt sich

$$f \in \mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \hat{\lambda}) \quad (\text{iii})$$

Die Funktion f kann nach Proposition 4.4 bis auf Isomorphie in
Ens mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ identifiziert werden, woraus und nach (i) folgt

$$f \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^1(X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\lambda_n}, \lambda_n) \quad (\text{iv})$$

Nach (iii) und (iv) ergibt sich, daß der Vektorverband
 $\mathcal{L}^1(X^\infty, \mathcal{M}, \hat{\lambda})$ ein echter Teilvektorverband des Vektorverbandes
 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^1(X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\lambda_n}, \lambda_n)$ ist.

Analog zum Satz 4.2 ist folgendes bewiesen:

4.7 Satz

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ und $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ wie
im Satz 4.2.

Dann ist die Familie $(\mathcal{L}^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), H_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei
 $1 \leq p < +\infty$ und die Abbildungen $H_{\alpha\beta}$ durch $H_{\alpha\beta}(u_\beta) := u_\beta \circ f_{\beta\alpha}$
für jedes $u_\beta \in \mathcal{L}^p(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ und $\alpha \leq \beta \in I$ definiert sind, ein
projektives System in s_1 und es gilt:

$$\text{a) } \mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in Vectlat}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } s_1$$

Die Räume $\mathcal{L}^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $\varprojlim_{\alpha \in I} \mathcal{L}^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ sind
i.a. nicht isomorph in Vectlat.

4.8 Satz

Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$, $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu)$ wie im
Satz 4.2.

Dann ist die Familie $(L^P(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{H}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei $1 \leq p < +\infty$ und die Abbildungen $\hat{H}_{\alpha\beta}$ durch $\hat{H}_{\alpha\beta}([u_\beta]) := [H_{\alpha\beta}(u_\beta)]$ für $\alpha \leq \beta \in I$ und $u_\beta \in L^P(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ definiert sind, ein projektives System in Ban_1 , und es gilt:

$$a) \quad L^P(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} L^P(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } \text{Ban}_1$$

$$b) \quad L^P(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}} L^P(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } \text{Ban}_1$$

für den Fall, daß $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = s.\lim_{\alpha \in \mathbb{N}} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$.

Beweis:

a) Behauptung 1:

Die Abbildungen $\hat{H}_{\alpha\beta}$; $\alpha \leq \beta \in I$ sind wohldefiniert und es gilt:
 $\hat{H}_{\alpha\gamma} = \hat{H}_{\alpha\beta} \circ \hat{H}_{\beta\gamma}$ für $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in I$.

Beweis:

Es seien $u_\beta \in L^P(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ und $u'_\beta \in [u_\beta]$.

Daraus folgt $u'_\beta - u_\beta \in N(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ oder $(u'_\beta - u_\beta)(x_\beta) = 0$

für jedes $x_\beta \in X_\beta \setminus N_{u'_\beta - u_\beta}$, wobei

$$N_{u'_\beta - u_\beta} := \{x_\beta \in X_\beta \mid (u'_\beta - u_\beta)(x_\beta) \neq 0\} \text{ und } \mu_\beta(N_{u'_\beta - u_\beta}) = 0.$$

Sei ferner $x_\alpha \in X_\alpha \setminus f_{\beta\alpha}^{-1}(N_{u'_\beta - u_\beta}) = f_{\beta\alpha}^{-1}(X_\beta \setminus N_{u'_\beta - u_\beta})$.

Daraus folgt $f_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in X_\beta \setminus N_{u'_\beta - u_\beta}$, oder

$$(u'_\beta \circ f_{\beta\alpha})(x_\alpha) - (u_\beta \circ f_{\beta\alpha})(x_\alpha) = 0 \text{ für jedes } x_\alpha \in X_\alpha \setminus f_{\beta\alpha}^{-1}(N_{u'_\beta - u_\beta}) \quad (i)$$

Andererseits gilt $\mu_\alpha \circ f_{\beta\alpha}^{-1}(N_{u'_\beta - u_\beta}) \leq \mu_\beta(N_{u'_\beta - u_\beta}) = 0$,

woraus $\mu_\alpha \circ f_{\beta\alpha}^{-1}(N_{u'_\beta - u_\beta}) = 0$ folgt. (ii)

Nach (i) und (ii) ergibt sich

$$u'_\beta \circ f_{\beta\alpha} - u_\beta \circ f_{\beta\alpha} \in N(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \quad \text{oder}$$

$$u'_\beta \circ f_{\beta\alpha} \in [u_\beta \circ f_{\beta\alpha}] \quad \text{oder}$$

$$H_{\alpha\beta}(u'_\beta) \in [H_{\alpha\beta}(u_\beta)] \quad \text{oder}$$

$$[H_{\alpha\beta}(u'_\beta)] = [H_{\alpha\beta}(u_\beta)] \quad \text{oder}$$

$$\hat{H}_{\alpha\beta}([u'_\beta]) = \hat{H}_{\alpha\beta}([u_\beta]) \quad \text{für alle } \alpha \leq \beta \in I$$

Analog zur Behauptung 1 im Beweis des Satzes 4.2 wird bewiesen, daß $H_{\alpha\beta}(u_\beta) \in L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ und $u_\beta \in L^p(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ gilt, woraus $[H_{\alpha\beta}(u_\beta)] \in L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ folgt.

Die Relation $\hat{H}_{\alpha\gamma} = \hat{H}_{\alpha\beta} \circ \hat{H}_{\beta\gamma}$ für $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in I$ ist offensichtlich. Offensichtlich ist auch, daß die Abbildungen $\hat{H}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ lineare Kontraktionen sind. Daraus und nach Behauptung 1 ist die Familie $(L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{H}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Ban_1 .

Behauptung 2:

Es seien $u \in L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $u_\alpha := u \circ f_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Dann gilt: $N_u = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(N_{u_\alpha})$ und $f_\alpha^{-1}(N_u) = N_{u_\alpha}$ für jedes $\alpha \in I$.

Beweis:

Die erste Relation ist offensichtlich. Es sei jetzt $\alpha \in I$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_\alpha &\in f_\alpha^{-1}(N_u), \text{ oder} \\ u f_\alpha(x_\alpha) &\neq 0, \text{ oder} \\ u_\alpha(x_\alpha) &\neq 0, \text{ oder} \\ x_\alpha &\in N_{u_\alpha} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Es seien weiter $(K, (\hat{H}_\alpha)_{\alpha \in I})$ der Ban_1 -projektive Limes von $(L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{H}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ und die Abbildungen

$$\hat{w}_\alpha : L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$$

definiert durch

$$\hat{w}_\alpha([u]) := [w_\alpha(u)] \quad \text{für } \alpha \in I,$$

wobei w_α die im Beweis des Satzes 4.2 definierten Abbildungen sind.

Die Abbildungen $\hat{w}_\alpha$ sind wohldefinierte Morphismen in Ban_1 und offensichtlich gilt:

$$\hat{H}_{\alpha\beta} \circ \hat{w}_\beta = \hat{w}_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \leq \beta \in I.$$

Daraus, nach Definition 0.1 und nach 0.2.5 folgt, daß genau ein Ban_1 -Morphismus $\hat{w}$ von $L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ nach K existiert mit

$$\hat{w} = \varprojlim_{\alpha \in I} \hat{w}_\alpha.$$

Behauptung 3:

Die Abbildung $\hat{w}$ ist injektiv.

Beweis wie der von Behauptung 2 des Satzes 4.2, und mit Hilfe der Behauptung 2 oben.

Behauptung 4:

Die Abbildung $\hat{w}^{-1} : \hat{w}(L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)) \longrightarrow L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ ist eine lineare Kontraktion.

Beweis:

Sei $t \in \hat{w}(L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu))$. Es existiert ein $[g] \in L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $t = \hat{w}([g])$. Daraus und nach Lemma 4.3 a) folgt:

$$\|\hat{w}^{-1}(t)\|_p = \|\hat{w}^{-1}(\hat{w}([g]))\|_p = \|[g]\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|g \circ f_\alpha\|_p.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^{-1}(t)\|_p &= \sup_{\alpha \in I} \|\hat{w}_\alpha([g])\|_p = \sup_{\alpha \in I} \|\hat{H}_\alpha(\hat{w}([g]))\|_p \leq \\ &\leq \|\hat{w}([g])\| = \|t\| \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 4 bewiesen.

Aus dem obigen ergibt sich:

$$L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq Ban_1 = \varprojlim_{\alpha \in I} L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha).$$

b) Wir brauchen nur zu zeigen, daß die Abbildung $\hat{w}$ surjektiv ist.

Es sei $([u_\alpha])_{\alpha \in \mathbb{N}}$ ein Element von $\text{Ban}_1\text{-}\varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}} L^p(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$.

Daraus ergibt sich:

$$\hat{H}_{\alpha\beta}([u_\beta]) = [u_\alpha] \quad \text{für } \alpha \leq \beta \in \mathbb{N}, \text{ oder:}$$

$$[H_{\alpha\beta}(u_\beta)] = [u_\alpha] \quad \text{für } \alpha \leq \beta \in \mathbb{N}, \text{ oder:}$$

$$[u_\beta \circ j_\beta] = [u_\alpha] \quad \text{für } \alpha \leq \beta \in \mathbb{N}, \text{ oder:}$$

$$u_\beta \circ j_\beta = u_\alpha \quad \mu_\alpha - \text{f.ü.} \quad \text{für } \alpha \leq \beta \in \mathbb{N} \quad (\text{iii})$$

Sei $N_\alpha := \bigcup_{\alpha \leq \beta \in \mathbb{N}} N_{\alpha,\beta}$, wobei $N_{\alpha,\beta} := \{x_\alpha \in X_\alpha : u_\beta \circ j_\beta(x_\alpha) \neq u_\alpha(x_\alpha)\}$.

Hieraus und nach (iii) folgt, daß N_α eine μ_α -Nullmenge für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ ist.

Wir konstruieren durch vollständige Induktion ein induktives System $(\tilde{u}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ von p-fach integrierbaren Funktionen

$\tilde{u}_\alpha : X_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $[\tilde{u}_\alpha] = [u_\alpha]$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x) &:= \begin{cases} u_1(x); & \text{falls } x \in X_1 \setminus N_1 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \\ \tilde{u}_2(x) &:= \begin{cases} \tilde{u}_1(x); & \text{falls } x \in X_1 \\ u_2(x); & \text{falls } x \in (X_2 \setminus X_1) \setminus [(X_2 \setminus X_1) \cap N_2] \\ 0; & \text{falls } x \in (X_2 \setminus X_1) \cap N_2 \end{cases} \\ \vdots & \\ \tilde{u}_{\alpha+1}(x) &:= \begin{cases} \tilde{u}_\alpha(x); & \text{falls } x \in X_\alpha \\ u_{\alpha+1}(x); & \text{falls } x \in (X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha) \setminus [(X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha) \cap N_{\alpha+1}] \\ 0; & \text{falls } x \in (X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha) \cap N_{\alpha+1} \end{cases} \\ \vdots & \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 b) existiert genau eine p-fach integrierbare

Funktion u auf X^∞ mit $u = \varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}} \tilde{u}_\alpha$ und $\|u\|_p = \lim_{\alpha \in \mathbb{N}} \|u_\alpha\|_p$.

Daraus folgt:

$u \circ j_\alpha = \tilde{u}_\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$, oder:

$w_\alpha(u) = \tilde{u}_\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$, oder:

$\hat{H}_\alpha(\hat{w}([u])) = [\tilde{u}_\alpha]$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$, oder:

$\hat{w}([u]) = ([\tilde{u}_\alpha])_{\alpha \in \mathbb{N}} = ([u_\alpha])_{\alpha \in \mathbb{N}}$.

Also existiert zu jedem $([u_\alpha])_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \text{Ban}_1\text{-}\varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}}^P (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$
genau ein $[u] \in L^P(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $\hat{w}([u]) = ([u_\alpha])_{\alpha \in \mathbb{N}}$.

Damit ist die Surjektivität der Abbildung $\hat{w}$ bewiesen.

4.9 Satz

Es sei $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ in $\mathcal{M}$. Dann ist die Folge $(L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n), j_{nm})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$, wobei $1 \leq p < +\infty$ und die Abbildungen j_{nm} durch

$$j_{nm}(u_m)(x) := \begin{cases} u_m(x); & \text{falls } x \in X_m \\ 0; & \text{falls } x \in X_n \setminus X_m \end{cases} \quad m \leq n \in \mathbb{N}$$

für $u_m \in L^p(X_m, \mathcal{M}_m, \mu_m)$ definiert sind, ein induktives System in Ban_1 und es gilt:

$$L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \text{ in } \text{Ban}_1.$$

Beweis:

Die Abbildungen $j_n : L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \rightarrow L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$; $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $j_n(u_n) =: u$ mit

$$u(x) := \begin{cases} u_n(x); & \text{falls } x \in X_n \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sind injektive lineare Kontraktionen, und deshalb kann jeder Raum $L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ mit einem Teilraum des $L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ identifiziert werden. Ebenfalls kann jeder Raum $L^p(X_m, \mathcal{M}_m, \mu_m)$ als Teilraum jedes $L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ für $m \leq n \in \mathbb{N}$ betrachtet werden. Außerdem gilt:

$\|f\|_{p,m} \geq \|f\|_{p,n}$ für $m \leq n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^p(X_m, \mathcal{M}_m, \mu_m)$, wobei mit $\|\cdot\|_{p,m}$ die L^p -Norm auf $L^p(X_m, \mathcal{M}_m, \mu_m)$ bezeichnet wird.

Ferner gilt:

$$\|f\|_p = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{p,n} \text{ für jedes } f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n).$$

Daraus und nach SEMADENI-ZIDENBERG [1, Th.3] folgt, daß die Relation

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \cong (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)) / N \text{ in } \text{Nvs}_1$$

wobei $N := \{f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \mid \|f\|_p = 0\}$, gilt.

Es gilt aber $N = \{ [0] \}$, wobei $[0]$ die Nullfunktion auf X ist, und deswegen ist

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \text{ in } Nvs_1.$$

Daraus und nach 11.8.8 (E) in SEMADENI [1] folgt

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n) \text{ in } Ban_1.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Relation

$$L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)} \text{ in } Ban_1 \text{ gilt.}$$

Sei $[f] \in L^p(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $f_n := f|_{X_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n \text{ und } f = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n, \text{ oder } \lim_{n \in \mathbb{N}} (f_n - f) = 0,$$

woraus $\lim_{n \in \mathbb{N}} |f_n - f|^p = 0$ folgt.

Andererseits gilt $|f_n - f|^p \leq |f|^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus und nach dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue sich

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_{X^\infty} |f_n - f|^p d\mu = 0, \text{ oder } \|[f_n] - [f]\|^p \rightarrow 0$$

ergibt.

Die letzte Relation aber bedeutet

$$[f] = \lim_{n \in \mathbb{N}} [f_n] \text{ bezüglich der } \|\cdot\|_p \text{ und deshalb gilt:}$$

$$[f] \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^p(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)}.$$

§ 5. Induktive und projektive Limiten von L^∞ -Räumen

Starke Liftings

In diesem Paragraph soll u.a. ein starkes Lifting durch ein vorgegebenes induktives System von starken Liftings erhalten werden. Dieses Resultat verallgemeinert bekannte Existenzsätze für starke Liftings. Dabei werden Sätze für L^∞ -Räume bewiesen, die als Hilfsmittel für den Beweis des Hauptresultates dieses als auch des nächsten Paragraphen gebraucht werden.

Alle in diesem und im nächsten Paragraphen verwendeten und hier nicht explizit aufgeführten Symbole, Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der C^* -Algebren bzw. Liftings sind in SAKAI [1] bzw. A. IONESCU TULCEA und C. IONESCU TULCEA [1] zu finden.

5.1 Induktive und projektive Limiten von L^∞ -Räumen

5.1.1 Definitionen und Bemerkungen

- i) Sind $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in der Kategorie C^* der C^* -Algebren und ihrer $*$ -Homomorphismen, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ das Alg- und Ban_1 -Produkt von X_α , X_∞ die C^* -Teilalgebra von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, die aus allen $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ mit $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ besteht, und $f_\alpha := \text{pr}_\alpha|_{X_\infty}$, so ist $(X_\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ der projektive Limes von $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in C^* .

ii) Es seien $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ eine Familie, wobei I eine aufsteigend filtrierende Menge ist, X_α C^* -Algebren mit Einheit für alle $\alpha \in I$ sind, und $f_{\beta\alpha} : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ $*$ -Isomorphismen für alle $\alpha \leq \beta \in I$ mit $f_{\beta\alpha}(1_\alpha) = 1_\beta$ (1_α bzw. 1_β ist die Einheit in X_α bzw. X_β) sind. Sei außerdem $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in I$. Dann heißt die Familie $(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein induktives System in C^* .

Sei ferner $(X, \tilde{f}_\alpha)_{\alpha \in I}$ der Alg-induktive Limes von

$(X_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$. Es gilt $\|x_\beta\| = \|f_{\beta\alpha}(x_\alpha)\| = \|x_\alpha\|$ für $\alpha \leq \beta \in I$, und deshalb existiert der Limes $\lim_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| =: \|x\|$

für $x \in X$. Dann ist $\|\cdot\|$ eine C^* -Halbnorm auf X . Sei weiter

$N := \{x \mid \|x\| = 0, x \in X\}$. Dann ist N ein selbstadjungiertes zweiseitiges Ideal in X . Betrachte jetzt die Quotienten $*$ -Algebra X/N mit der kanonischen Surjektion $g : X \rightarrow X/N$.

Dann definiert die Halbnorm $\|\cdot\|$ auf X eine C^* -Norm auf

X/N , die wieder mit $\|\cdot\|$ bezeichnet wird.

Sei schließlich X^∞ die C^* -Algebra, die durch die Vervollständigung des X/N konstruiert wird, $i : X/N \rightarrow X^\infty$ die entsprechende Isometrie (siehe SEMADENI [1, I, 2.9.3]) und die Abbildungen $f_\alpha := i \circ g \circ \tilde{f}_\alpha : X_\alpha \rightarrow X^\infty$ für alle $\alpha \in I$. Dann heißt $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ der induktive Limes von $(X_\alpha, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I})$ in C^* (siehe SAKAI [1, 1.2.3]).

iii) Es sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Bekanntlich ist $M(X, \mathcal{M}, \mu)$, versehen mit der Halbnorm

$$\|f\|_\infty := \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid \text{außerhalb einer Nullmenge gilt}$$

$$|f(x)| < c; x \in X \}, \text{ eine lokal } m\text{-konvexe Algebra.}$$

Die Algebra $M^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$, versehen mit der Norm $\| \cdot \|$

$$\text{definiert durch } \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| \text{ für } f \in M^\infty(X, \mathcal{M}, \mu),$$

ist eine C^* -Algebra und deshalb eine lokal m -konvexe Algebra.

5.1.2 Lemma

Es sei $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$.

Dann ist die Familie $(M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), (F_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I})$ bzw.

$(M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), (\tilde{F}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I})$, wobei die Abbildungen $F_{\alpha\beta}$ bzw. $\tilde{F}_{\alpha\beta}$

für alle $\alpha \leq \beta \in I$ durch $F_{\alpha\beta}(u_\beta) := u_\beta \circ f_{\beta\alpha}; u_\beta \in M(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$

bzw. $\tilde{F}_{\alpha\beta}(u_\beta) := u_\beta \circ f_{\beta\alpha}; u_\beta \in M^\infty(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ definiert sind,

ein projektives System in der Kategorie $m\text{-}s_1$, und es gilt:

$$a) \quad M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in Alg}$$

$$\text{bzw. } M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in Alg}$$

Insbesondere gilt die Relation " $\subseteq$ " i.a. nicht.

$$b) \quad M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } m\text{-}s_1$$

$$\text{bzw. } M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim_{\alpha \in I} M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } m\text{-}s_1$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 4.2. Insbesondere

besagt das Gegenbeispiel 4.6, daß die Isomorphie "≅" von $M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $\varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ (bzw. von $M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $\varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$) i. a. nicht gilt.

5.1.3 Satz

Es sei $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$.

Dann ist die Familie $(L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{F}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei die Abbildung $\hat{F}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ durch

$$\hat{F}_{\alpha\beta}([u_\beta]) := [F_{\alpha\beta}(u_\beta)] \quad \text{für alle } u_\beta \in M(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$$

definiert sind, ein projektives System in C^* und es gilt:

- a) $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \not\subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in Alg
 - b) $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in C^*
 - c) $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in C^* ,
- für den Fall: $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = s.\varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$.

Beweis:

a) Behauptung 1:

Die Abbildungen $\hat{F}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ sind wohldefiniert und es gilt $\hat{F}_{\alpha\gamma} = \hat{F}_{\alpha\beta} \circ \hat{F}_{\beta\gamma}$ für $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in I$.

Der Beweis der Behauptung 1 verläuft ähnlich wie der von Behauptung 1 im Beweis des Satzes 4.8.

Außerdem sind die Abbildungen $\hat{F}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ lineare Kontraktionen (siehe SAKAI [1, Cor. 1.2.6]) und *-Homomorphismen, weil die Abbildungen $F_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ und

$\pi_\alpha: M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, definiert durch

$\pi_\alpha(u_\alpha) := [u_\alpha]$ für alle $u_\alpha \in M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ und $\alpha \in I$ ebenso sind.

Also ist die Familie $(L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{F}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in C^* .

Es sei ferner $(L, (w_\alpha))_{\alpha \in I}$ der Alg-projektive Limes von $(L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), \hat{F}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$. Die Familie $(\pi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist nach der Definition der Abbildungen $\hat{F}_{\alpha\beta}$ ein projektives System von Alg-Morphismen, woraus die Existenz genau eines Alg-Morphismus $\pi : \varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \longrightarrow \varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ mit $\pi = \varprojlim_{\alpha \in I} \pi_\alpha$ folgt (vgl. Definition 0.1).

Nach Lemma 5.1.2 ist die Algebra $M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ zu einer Teilalgebra der Algebra $\varprojlim_{\alpha \in I} M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ isomorph, und deswegen kann die Einschränkung $\hat{\pi}$ auf $M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ der Abbildung π betrachtet werden.

Behauptung 2:

$\text{Ker}(\hat{\pi}) = N(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$.

Beweis mit Hilfe von Behauptung 2 im Beweis des Satzes 4.8.

Hieraus ergibt sich

$$M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) / N(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \hat{\pi}(M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu))$$

in Alg

Also gilt:

$$L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in Alg} \quad (i)$$

b) und c):

(i)

Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 4.8.

5.1.4 Satz

Es sei $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$ wie in 3.2.1.

Dann ist die Familie $(L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha), j_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta \in I}$, wobei die Abbildungen $j_{\beta\alpha} : L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow L^\infty(X_\beta, \mathcal{M}_\beta, \mu_\beta)$ für $\alpha \leq \beta \in I$ durch

$$j_{\beta\alpha}(u_\alpha)(x) := \begin{cases} u_\alpha(x); & \text{falls } x \in X_\alpha \\ 0; & \text{falls } x \in X_\beta \setminus X_\alpha \end{cases} \quad (u_\alpha \in L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha))$$

definiert sind, ein induktives System in C^* und es gilt:

$$L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \cong \varinjlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \text{ in } C^*.$$

Beweis:

Behauptung:

$$\bigcup_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) = L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu).$$

Beweis:

Es seien $[f] \in L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ und $f_\alpha := f|_{X_\alpha}$ für $\alpha \in I$.

Dann gilt: $f_\alpha \in M(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, $f = \varinjlim_{\alpha \in I} f_\alpha$ und $f = \lim_{\alpha \in I} f_\alpha$ bzgl.

der $\|\cdot\|_\infty$ in $M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$, woraus die $\|\cdot\|_\infty$ -Konvergenz der $([f_\alpha])_{\alpha \in I}$ gegen $[f]$ in $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ folgt.

Also ist $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)}$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach der Behauptung und aus einem Resultat von Z. TAKEDA (siehe SAKAI [1, Cor.1.23.3]) folgt die Behauptung des Satzes.

5.2 Starke Liftings

5.2.1 Definitionen

i) Es sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Eine Abbildung $\rho: L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow M^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt ein Lifting, wenn sie folgende Eigenschaften hat.

1. Für jede Funktion $f \in M^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ gilt: $\rho(\lfloor f \rfloor) = f \quad \mu - f.u.$

2. $\rho(1_X) = 1_X$

3. Für jede Klasse $\lfloor f \rfloor \in L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ gilt:

Ist $\lfloor f \rfloor \geq 0$, so ist $\rho(\lfloor f \rfloor) \geq 0$.

4. ρ ist eine lineare Abbildung

5. ρ ist eine multiplikative Abbildung.

ii) Es seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein topologischer Maßraum, ρ ein Lifting für $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $\mu(U) > 0$ für jedes $U \in \mathcal{O}(X)$, $U \neq \emptyset$.

Dann heißt das Lifting stark, wenn für jede offene Menge U in X gilt:

$$\rho(\lfloor 1_U \rfloor) \geq 1_U.$$

5.2.2 Satz

Es sei $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$

Dann gilt:

- i) Sind die Maßräume $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ vollständig für alle $\alpha \in I$, so ist $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ wieder vollständig.
- ii) Ist $\mu_\alpha(U_\alpha) > 0$ für jedes $U_\alpha \in \mathcal{O}(X_\alpha)$, $U_\alpha \neq \emptyset$ und für jedes $\alpha \in I$, so ist $\mu(U) > 0$ für jedes $U \in \mathcal{O}(X)$ $U \neq \emptyset$.
- iii) Ist die Familie $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein projektives System von starken Liftings $\rho_\alpha: L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, so existiert genau ein starkes Lifting ρ für $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$, so daß die Relation
- $$q_\alpha \circ \rho = \rho_\alpha \circ w_\alpha \text{ für jedes } \alpha \in I$$
- gilt, wobei q_α (bzw. w_α) die kanonischen Projektionen von $\text{Alg-}\varprojlim_{\alpha \in I} M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ nach $M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ (bzw. von $\text{Alg-}\varprojlim_{\alpha \in I} L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ nach $L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$) für alle $\alpha \in I$ sind.

Beweis:

- i): Die Behauptung (i) des Satzes ist offensichtlich.
- ii): Wir nehmen an, daß eine nicht leere offene Teilmenge U von X^∞ existiert mit $\mu(U) = 0$. Daraus und nach Satz 3.1.2 folgt $\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(U) = 0$ für jedes $\alpha \in I$, welches zu der Voraussetzung $\mu_\alpha(U_\alpha) > 0$ für jedes $U_\alpha \in \mathcal{O}(X_\alpha)$ $U_\alpha \neq \emptyset$ und für jedes $\alpha \in I$ widerspricht.
- iii): Die Familie $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist ein projektives System von Alg-Morphismen. Daraus und nach Satz 5.1.3 ergibt sich die Existenz genau eines Alg-Morphismus $\rho: L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow \varprojlim_{\alpha \in I} M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ mit $q_\alpha \circ \rho = \rho_\alpha \circ w_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ (vgl. Definition 0.1).

Behauptung 1:

$$\rho([u]) = u \quad \mu\text{-f.ü. für jedes } u \in M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu).$$

Beweis:

Sei $u \in M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$. Nach Lemma 5.1.2 ergibt sich

$u \in \lim_{\alpha \in I} M^\infty(X_\alpha^\infty, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, woraus die Relation

$$q_\alpha(u) = u \circ f_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in I$$

folgt. Daraus und nach (1) gilt:

$$q_\alpha(\rho(\lfloor u \rfloor)) = \rho_\alpha(w_\alpha(\lfloor u \rfloor)) = \rho_\alpha(\lfloor u \circ f_\alpha \rfloor) = u \circ f_\alpha \quad \mu_\alpha\text{-f.ü. für alle } \alpha \in I, \text{ oder } q_\alpha(\rho(\lfloor u \rfloor)) = q_\alpha(u) \quad \mu\text{-f.ü. für alle } \alpha \in I. \quad (2)$$

Sei ferner

$$N_\alpha := \{ x_\alpha \in X_\alpha \mid q_\alpha(\rho(\lfloor u \rfloor))(x_\alpha) - (q_\alpha(u))(x_\alpha) \neq 0 \} \quad \text{für } \alpha \in I.$$

Nach (2) ergibt sich

$$\mu_\alpha(N_\alpha) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in I \quad (3).$$

Außerdem gilt:

$$\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(N_\alpha) = \{ x \in X^\infty \mid \rho(\lfloor u \rfloor)(x) - u(x) \neq 0 \} =: N \quad \text{und} \\ f_\alpha^{-1}(N) = N_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in I$$

(Beweis wie der von Satz 4.8, Behauptung 2)

Hieraus, nach (3) und nach Satz 3.1.2 folgt:

$$\mu(N) = 0$$

Also gilt:

$$\rho(\lfloor u \rfloor) = u \quad \mu\text{-f.ü. für jedes } u \in M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$$

Behauptung 2:

Für jede Klasse $\lfloor u \rfloor \in L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $\lfloor u \rfloor \geq 0$ gilt $\rho(\lfloor u \rfloor) \geq 0$.

Beweis:

Sei $\lfloor u \rfloor \in L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit $\lfloor u \rfloor \geq 0$. Nach (1) und nach der Voraussetzung in (iii) folgt:

$$q_\alpha(\rho(\lfloor u \rfloor)) = \rho_\alpha(w_\alpha(\lfloor u \rfloor)) = \rho_\alpha(\lfloor u \circ f_\alpha \rfloor) \geq \lfloor 0_\alpha \rfloor = q_\alpha(0), \text{ oder} \\ q_\alpha(\rho(\lfloor u \rfloor)) \geq q_\alpha(0) \quad \text{für alle } \alpha \in I, \text{ oder}$$

$$\rho(\lfloor u \rfloor) \geq 0.$$

Behauptung 3:

Die Abbildung ρ ist eine Abbildung von $L^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ nach $M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$.

Beweis:

Sei $u \in M(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$. Es existiert ein $k \in \mathbb{R}_0^+$, so daß:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq k \quad \text{für alle } x \in X^\infty \setminus N; \mu(N) = 0, \text{ oder} \\ -k &\leq u(x) \leq k \quad \text{für alle } x \in X^\infty \setminus N; \mu(N) = 0, \text{ oder} \\ [u - k 1_{X^\infty}] &\leq [0] \quad \text{und} \quad [u + k 1_{X^\infty}] \geq [0]. \end{aligned}$$

Daraus und nach Behauptung 2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho([u - k 1_{X^\infty}]) &\leq 0 \quad \text{und} \quad \rho([u + k 1_{X^\infty}]) \geq 0, \text{ oder} \\ |\rho([u])| &\leq k, \text{ oder } \rho([u]) \in M^\infty(X^\infty, \mathcal{M}, \mu). \end{aligned}$$

Der Beweis der Eigenschaft $\rho([1_U]) \geq 1_U$ für jede offene Teilmenge U von X^∞ verläuft ähnlich, wie der von Behauptung 2.

5.2.3 Bemerkung

Wenn man auf die topologischen Voraussetzungen des Satzes 5.2.2 verzichtet, dann gilt wieder die Behauptung (i). Außerdem gilt: Ist $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein projektives System von Liftings

$\rho_\alpha: L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, so existiert genau ein Lifting ρ für $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$ mit

$$q_\alpha \circ \rho = \rho_\alpha \circ w_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in I$$

(q_α und w_α sind wie in Satz 5.2.2).

5.2.4 Korollar

Es seien X die topologische direkte Summe von X_t , wobei t Element einer beliebigen Indexmenge T ist, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ die direkte Summe der topologischen Maßräume $(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$ für $t \in T$ und $(\rho_t)_{t \in T}$ eine Familie von starken Liftings $\rho_t: L^\infty(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t) \rightarrow M^\infty(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$.

Dann existiert genau ein starkes Lifting ρ für $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit

$$\rho(\lfloor f \rfloor) \circ j_\alpha = \sum_{t \in \alpha} \rho_t(\lfloor f_t \rfloor)$$

für jede endliche Teilmenge α von T und

$$\lfloor f \rfloor \in L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu); (f_t := f \circ j_t)$$

Beweis:

Es seien I und $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ wie in 3.2.3. Dann gilt nach

3.2.3.2 (ii) $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$. Jedes

$\lfloor f_\alpha \rfloor \in L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ hat eine eindeutige Darstellung $\lfloor f_\alpha \rfloor = \sum_{t \in \alpha} \lfloor f_t \rfloor$ mit $\lfloor f_t \rfloor \in L^\infty(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$. Dann ist jede Abbildung

$\rho_\alpha : L^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha) \rightarrow M^\infty(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ definiert durch

$$\rho_\alpha(\lfloor f_\alpha \rfloor) := \sum_{t \in \alpha} \rho_t(\lfloor f_t \rfloor)$$

ein starkes Lifting für $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ und die Familie $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist ein projektives System von starken Liftings.

Also sind alle Voraussetzungen des Satzes 5.2.2 erfüllt, woraus die Existenz genau eines starken Liftings ρ für $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit $q_\alpha \circ \rho = \rho_\alpha \circ w$ für alle $\alpha \in I$ folgt, wobei die Abbildungen q_α und w_α wie in Satz 5.2.2 sind.

Hieraus ergibt sich

$$\rho(\lfloor f \rfloor) \circ j_\alpha = \sum_{t \in \alpha} \rho_t(\lfloor f_t \rfloor)$$

für alle $\alpha \in I$ und $\lfloor f \rfloor \in L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit $f_t := f \circ j_t$; $t \in T$.

Folgendes verallgemeinert das Hauptresultat von GRAF [1]:

5.2.5_Korollar:

Es seien X die topologische direkte Summe von $(X_t)_{t \in T}$ und $(X, \mathcal{M}, \mu)$ die direkte Summe der topologischen Maßräume $(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$, wobei X_t für alle $t \in T$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, μ_t endliche Maße für alle $t \in T$ sind, $\text{supp } \mu_t = X_t$ für alle $t \in T$

gilt, und alle Maßräume $(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$ vollständig sind.

Dann existiert genau ein starkes Lifting ρ für $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit

$$\rho(\lfloor f \rfloor) \circ j_\alpha = \sum_{t \in \alpha} \rho_t(\lfloor f_t \rfloor)$$

für jede endliche Teilmenge α von T und $\lfloor f \rfloor \in L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit

$$f_t := f \circ j_t.$$

Beweis:

Nach Graf [1, Th.2] existiert ein starkes Lifting ρ_t für

$(X_t, \mathcal{M}_t, \mu_t)$ für alle $t \in T$. Daraus und nach Korollar 5.2.4

folgt die Behauptung des Korollars.

Es ist interessant, ob man im Satz 5.2.2 auf die Voraussetzung, daß die Familie $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein projektives System ist, verzichten kann. Das ist im Folgenden erreichbar.

5.2.6. Satz

Es seien $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu) = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$ und $(\rho'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

eine Folge von starken Liftings ρ'_n für $(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$. Dann existiert ein starkes Lifting ρ für $(X^\infty, \mathcal{M}, \mu)$, das als der projektive Limes einer Folge von starken Liftings dargestellt werden kann.

Beweis:

Wir konstruieren folgendermaßen eine Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von starken Liftings ρ_n für $(X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$, die ein projektives System ist, durch vollständige Induktion:

$$\rho_1 := \rho'_1$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\lfloor u_2 \rfloor)(x) &:= \begin{cases} \rho_1(\lfloor u_2 \circ j_{2,1} \rfloor)(x) & \text{falls } x \in X_1 \\ \rho'_1(\lfloor u_2 \rfloor)(x) & \text{falls } x \in X_2 \setminus X_1 \end{cases} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \quad \text{für } \lfloor u_2 \rfloor \in L^\infty(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2) \\ \\ \rho_{n+1}(\lfloor u_{n+1} \rfloor)(x) &:= \begin{cases} \rho_n(\lfloor u_{n+1} \circ j_{n+1,n} \rfloor)(x) & \text{falls } x \in X_n \\ \rho'_n(\lfloor u_{n+1} \rfloor)(x) & \text{falls } x \in X_{n+1} \setminus X_n \end{cases} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \quad \text{für } \lfloor u_{n+1} \rfloor \in L^\infty(X_{n+1}, \mathcal{M}_{n+1}, \mu_{n+1}) \end{aligned}$$

Hieraus und nach Satz 5.2.2 folgt die Aussage des Satzes.

5.2.7 Bemerkungen

Wenn man in Satz 5.2.6 die topologischen Voraussetzungen wegläßt, kann man mit der gleichen Beweismethode folgendes zeigen:

- i) Der strikte induktive Limes von strikt lokalisierbaren Maßräumen ist strikt lokalisierbar (siehe A. und C. IONESCU TULCEA [1, IV,3,Th.5]).
- ii) Der strikte induktive Limes von Maßräumen, von denen jeder ein Lifting gestattet, hat die Radon-Nikodym Eigenschaft, erfüllt die Voraussetzungen des Riesz'schen Darstellungssatzes (siehe A. und C. IONESCU TULCEA [1, IV,3,Th.5; I,7, Prop.3] und SEGAL [1, Th.5.1]) und ist Dedekind-vollständig (siehe A. und C. IONESCU TULCEA [1, I,8,Th.18]).

§ 6. Punkt-Realisierung von L^∞ -Endomorphismen

Es seien $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{U}, \nu)$ zwei lokalisierbare Maßräume. Ein Homomorphismus $\underline{\Phi}$ von $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nach $L^\infty(Y, \mathfrak{U}, \nu)$ heißt normal, falls $\underline{\Phi}(\sup \mathcal{F}) = \sup \underline{\Phi}(\mathcal{F})$ für eine beliebige aufsteigend filtrierende und nach oben beschränkte Teilmenge $\mathcal{F}$ von $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ gilt.

Jørger Vesterstrøm und Wilbert Wils haben 1969 folgendes bewiesen:

6.1 Satz (J.VESTERSTRØM - W.WILS [1])

Es seien $(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ bzw. $(Y, \mathfrak{B}(Y), \nu)$ lokalkompakte Maßräume mit μ bzw. ν positiven Radon-Maßen auf $\mathfrak{B}(X)$ bzw. $\mathfrak{B}(Y)$ und $\underline{\Phi}$ ein normaler $*$ -Homomorphismus von $L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$ nach $L^\infty_{\mathbb{C}}(Y, \mathfrak{B}(Y), \nu)$ mit $\underline{\Phi}(1_X) = 1_Y$.

Dann existiert eine Abbildung $\eta: Y \longrightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) Wenn $f \in M^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$, dann $f \circ \eta \in M^\infty_{\mathbb{C}}(Y, \mathfrak{B}(Y), \nu)$.
- ii) Ist $A \subseteq X$ eine Nullmenge, so ist $\eta^{-1}(A)$ eine Nullmenge.
- iii) Wenn $f \in M^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mathfrak{B}(X), \mu)$, dann $\underline{\Phi}(\underline{f}) = \underline{f \circ \eta}$.

Dieser Satz ist in J.VON NEUMANN [1] 1932 bewiesen, wenn die Räume X und Y metrisierbar sind. Unter Benutzung von Liftings und Desintegrationen von Maßen hat C.Ionescu Tulcea ein entsprechendes Resultat 1965 für kompakte Räume bewiesen (siehe C.IONESCU TULCEA [1]).

Im Folgenden ist ein Satz bewiesen, dessen Korollar das Resultat von Vesterström-Wils verallgemeinert. Um diesen Satz präzise formulieren und beweisen zu können, benötigt man folgende

6.2 Definition

Für zwei lokalisierbare Maßräume $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{U}, \nu)$ gilt die Punkt-Realisierungseigenschaft, falls zu jedem normalen *-Homomorphismus Φ von $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nach $L^\infty(Y, \mathfrak{U}, \nu)$ mit $\Phi(1_X) = 1_Y$ eine Abbildung $\eta: Y \rightarrow X$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) wie in Satz 6.1 existiert.

6.3 Satz

Es seien $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ ein lokalisierbarer Maßraum und

$(Y, \mathfrak{M}, \nu) = s.\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$, wobei die Maßräume $(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$ strikt lokalisierbar sind.

Außerdem gelte für die Räume $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ und $(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Punkt-Realisierungseigenschaft.

Dann gilt auch für die Räume $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ die Punkt-Realisierungseigenschaft.

Beweis:

Sei Φ ein normaler *-Homomorphismus von $L^\infty(X, \mathfrak{U}, \mu)$ nach $L^\infty(Y, \mathfrak{M}, \nu)$. Nach Bemerkung 5.2.7 ist die Voraussetzung der Normalität von Φ erlaubt.

Nach dem Satz 5.1.3 gilt

$$L^\infty(Y, \mathfrak{M}, \nu) \subseteq \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} L^\infty(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n) \text{ in Alg,}$$

und deshalb kann Φ als eine Abbildung von $L^\infty(X, \mathfrak{U}, \mu)$ nach

$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} L^\infty(Y_n, \mathfrak{M}_n, \nu_n)$ betrachtet werden. Es seien jetzt die Ab-

bildungen $\underline{\Phi}_n := w_n \circ \underline{\Phi} : L^\infty(X, \mathcal{U}, \mu) \longrightarrow L^\infty(Y_n, \mathcal{M}_n, v_n)$, wobei w_n die kanonischen Projektionen von $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} L^\infty(Y_n, \mathcal{M}_n, v_n)$ nach $L^\infty(Y_n, \mathcal{M}_n, v_n)$ sind.

Offensichtlich sind die Abbildungen $\underline{\Phi}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ *-Homomorphismen mit $\underline{\Phi}_n(1_X) = 1_{Y_n}$, und die Folge $(\underline{\Phi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein projektives System von Abbildungen.

Behauptung 1:

Die *-Homomorphismen $\underline{\Phi}_n$ sind normal für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Sei $\mathcal{F}$ eine aufsteigend filtrierende und nach oben beschränkte Teilmenge von $L^\infty(X, \mathcal{U}, \mu)$. Es gilt

$$\underline{\Phi}(\sup \mathcal{F}) = \sup \underline{\Phi}(\mathcal{F}), \text{ oder}$$

$$(w_n \circ \underline{\Phi})(\sup \mathcal{F}) = w_n(\sup \underline{\Phi}(\mathcal{F})) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus und nach der Definition der $\underline{\Phi}_n$

ergibt sich:

$$\underline{\Phi}_n(\sup \mathcal{F}) = \sup \underline{\Phi}_n(\mathcal{F}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung 2:

Es existiert ein induktives System $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $\eta_n : Y_n \longrightarrow X$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) wie in Satz 6.1.

Beweis:

Nach der Voraussetzung existiert eine Folge $(\eta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $\eta'_n : Y_n \longrightarrow X$ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii).

Wir konstruieren folgendermaßen ein induktives System $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $\eta_n : Y_n \longrightarrow X$ mit den oben genannten Eigenschaften durch vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}\eta_1 &:= \eta'_1 \\ \eta_2(y) &:= \begin{cases} \eta_1(y) & \text{falls } y \in Y_1 \\ \eta'_2(y) & \text{falls } y \in Y_2 \setminus Y_1 \end{cases} \\ \vdots \\ \eta_n(y) &:= \begin{cases} \eta_{n-1}(y) & \text{falls } y \in Y_{n-1} \\ \eta'_n(y) & \text{falls } y \in Y_n \setminus Y_{n-1} \end{cases}\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion beweisen wir die Eigenschaften (i), (ii), (iii) für die Abbildungen η_n ; $n \in \mathbb{N}$.

i): Sei $h \in M^\infty(X, \mathcal{U}, \mu)$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(h \circ \eta_{n+1})^{-1}(A) &= (\eta_n^{-1}(h^{-1}(A) \cap Y_n)) \cup \\ &\cup ((\eta'_{n+1})^{-1}(h^{-1}(A) \cap (Y_{n+1} \setminus Y_n))).\end{aligned}$$

Daraus, nach der Induktionsannahme und nach der Eigenschaft

(i) für η'_{n+1} folgt

$$(h \circ \eta_{n+1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}(Y_{n+1}).$$

Also gilt:

$$h \circ \eta_n \in M^\infty(Y_n, \mathcal{M}_n, \nu_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } h \in M^\infty(X, \mathcal{U}, \mu).$$

ii): Analog zu (i) und mit Hilfe des Satzes 3.1.2.

iii): Sei $h \in M^\infty(X, \mathcal{U}, \mu)$ und $\Phi_n(\lfloor h \rfloor) = \lfloor h \circ \eta_n \rfloor$; $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(\lfloor h \rfloor)(y) &= \begin{cases} \Phi_{n+1}(\lfloor h \rfloor)(j_{n+1,n}(y)) & \text{falls } y \in Y_n \\ \lfloor h \circ \eta'_{n+1} \rfloor(y) & \text{falls } y \in Y_{n+1} \setminus Y_n \end{cases}, \text{ oder} \\ \Phi_{n+1}(\lfloor h \rfloor)(y) &= \begin{cases} \Phi_n(\lfloor h \rfloor)(y) & \text{falls } y \in Y_n \\ \lfloor h \circ \eta_{n+1} \rfloor(y) & \text{falls } y \in Y_{n+1} \setminus Y_n \end{cases}, \text{ oder} \\ \Phi_{n+1}(\lfloor h \rfloor)(y) &= \begin{cases} \lfloor h \circ \eta_n \rfloor(y) & \text{falls } y \in Y_n \\ \lfloor h \circ \eta_{n+1} \rfloor(y) & \text{falls } y \in Y_{n+1} \setminus Y_n \end{cases}, \text{ oder} \\ \Phi_{n+1}(\lfloor h \rfloor)(y) &= \lfloor h \circ \eta_{n+1} \rfloor(y)\end{aligned}$$

Behauptung 3:

Es existiert eine Abbildung $\eta: Y^\infty \rightarrow X$ mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii).

Beweis:

Es existiert genau eine Abbildung $\eta: Y^\infty \rightarrow X$, so daß $\eta \circ j_n = \eta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und η die Eigenschaft (i) hat. Die Eigenschaft (ii) folgt nach dem Satz 3.1.2 und nach der Eigenschaft (ii) für η_n ; $n \in \mathbb{N}$.

Es muß noch die Eigenschaft (iii) bewiesen werden:

Sei $h \in M^\infty(X, \mathcal{U}, \mu)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi_n(\lfloor h \rfloor) &= \lfloor h \circ \eta_n \rfloor \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ (w_n \circ \Phi)(\lfloor h \rfloor) &= \lfloor h \circ \eta_n \rfloor \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ \Phi(\lfloor h \rfloor) \circ j_n &= \lfloor h \circ \eta_n \rfloor \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Daraus und nach $\lfloor h \circ \eta_n \rfloor = \lfloor h \circ \eta \rfloor \circ j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned}\Phi(\lfloor h \rfloor) \circ j_n &= \lfloor h \circ \eta \rfloor \circ j_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ \Phi(\lfloor h \rfloor) &= \lfloor h \circ \eta \rfloor.\end{aligned}$$

6.4 Korollar

Es seien $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ein lokalkompakter Hausdorffscher Radon-Maßraum und $(Y, \mathcal{B}(Y), \nu) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (Y_n, \mathcal{B}(Y_n), \nu_n)$, wobei alle $(Y_n, \mathcal{B}(Y_n), \nu_n)$ lokalkompakte Hausdorffsche Radon-Maßräume sind.

Dann gilt für die Räume $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}(Y), \nu)$ die Punkt-Realisierungseigenschaft.

Beweis:

Die Räume $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ und $(Y_n, \mathcal{B}(Y_n), \nu_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ sind strikt lokalisierbar und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Räume $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ und $(Y_n, \mathcal{B}(Y_n), \nu_n)$ nach Satz 6.1 die Punkt-Realisierungseigenschaft. Daraus und nach Satz 6.3 ergibt sich die Behauptung des Korollars.

Nach Satz 3.3.3 gilt $\mathcal{M} = \mathcal{B}(Y)$.

§ 7. Graphen von meßbaren Abbildungen

7.1 Induktive Limiten von Graphen von meßbaren Abbildungen

7.1.1 Proposition

Es seien $(X_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}, \mathcal{B}(X_\alpha))_{\alpha \leq \beta \in I}$ bzw. $(Y_\sigma, \psi_{\tau\sigma}, \mathcal{B}(Y_\sigma))_{\sigma \leq \tau \in J}$ induktive Systeme von topologischen meßbaren Räumen und $(X^\infty, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}_{X^\infty})$ bzw. $(Y^\infty, (\psi_\sigma)_{\sigma \in J}, \mathcal{M}_{Y^\infty})$ ihre induktiven Limiten. Dann gilt:

- I) Die Menge $I \times J$, versehen mit der kanonischen Ordnung, ist eine aufsteigend filtrierende Menge.
- II) Die Familie $(X_\alpha \times Y_\sigma, \mathcal{B}(X_\alpha \times Y_\sigma), \vee_{(\beta, \tau) \leq (\alpha, \sigma)} (\alpha, \sigma) \in I \times J, \text{ wobei } \vee_{(\beta, \tau) \leq (\alpha, \sigma)} := \varphi_{\beta\alpha} \times \psi_{\tau\sigma}, \text{ ist ein induktives System von topologischen meßbaren Räumen.}$
- III) Es existiert genau eine Abbildung $k : \lim_{(\alpha, \sigma) \in I \times J} (X_\alpha \times Y_\sigma) \rightarrow X^\infty \times Y^\infty$, die der induktive Limes der Abbildungen $(\varphi_\alpha \times \psi_\sigma)_{(\alpha, \sigma) \in I \times J}$, bijektiv und $\mathcal{M}_{\lim_{(\alpha, \sigma) \in I \times J} X_\alpha \times Y_\sigma} = \mathcal{M}_{X^\infty} \otimes \mathcal{M}_{Y^\infty}$ -meßbar ist.

Der Beweis des Lemmas verläuft analog zu dem von 1.9 in DUGUNDJI [1, Appendix two].

Von Interesse ist die Frage nach dem Isomorphismus von

$(\lim_{(\alpha, \sigma) \in I \times J} (X_\alpha \times Y_\sigma), \mathcal{M}_{\lim_{(\alpha, \sigma) \in I \times J} (X_\alpha \times Y_\sigma)})$ und $(X^\infty \times Y^\infty, \mathcal{M}_{X^\infty} \otimes \mathcal{M}_{Y^\infty})$. Hierzu ist bewiesen.

7.1.2 Proposition

Es seien $(X^\infty, (i_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{M}_{X^\infty}) = s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, i_n, \mathcal{B}(X_n))$ bzw.

$(Y^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{M}_{Y^\infty}) = s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (Y_n, j_n, \mathcal{B}(Y_n))$ in Top, wobei alle Räume X_n bzw. Y_n polnisch sind und alle X_n bzw. Y_n abgeschlossene Teilmengen von X^∞ bzw. Y^∞ sind.

Dann sind die meßbaren Räume $(s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n), \mathcal{M}_{s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)})$ und $(X^\infty \times Y^\infty, \mathcal{M}_{X^\infty} \otimes \mathcal{M}_{Y^\infty})$ isomorph.

Insbesondere sind die Räume $s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)$ und $X^\infty \times Y^\infty$ Borel-isomorph.

Beweis:

Nach Satz 3.3.3 folgt:

$$\mathcal{M}_{X^\infty} = \mathcal{B}(X^\infty), \mathcal{M}_{Y^\infty} = \mathcal{B}(Y^\infty) \text{ und}$$

$$\mathcal{M}_{s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)} = \mathcal{B}(s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)).$$

Daraus und nach Proposition 7.1.1 folgt, daß genau eine bijektive,

$$\mathcal{B}(s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)) - \mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty)\text{-meßbare Abbildung}$$

$$k : s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n) \longrightarrow X^\infty \times Y^\infty \text{ mit } k = \lim_{n \in \mathbb{N}} i_n \times j_n \text{ existiert.}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Abbildung $k^{-1} : \mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n))$ -meßbar ist. Hierzu seien

$v_n : X_n \times Y_n \longrightarrow s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)$ die kanonischen Surjektionen und

A eine abgeschlossene Teilmenge von $s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)$.

Dann sind $v_n^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X_n \times Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v_n^{-1}(A) \text{ und folglich } k(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (i_n \times j_n)(v_n^{-1}(A)).$$

Daraus und nach der Abgeschlossenheit der Abbildungen v_n folgt

$$k(A) \in \mathcal{B}(X^\infty \times Y^\infty) \quad (i)$$

Behauptung:

$$\text{Es gilt } \mathcal{B}(X^\infty \times Y^\infty) = \mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty).$$

Beweis:

Es sei A eine offene Teilmenge von $X^\infty \times Y^\infty$. Dann gilt

$A = \bigcup_{i \in I} B_i \times D_i$, wobei alle B_i bzw. D_i die offenen Teilmengen von X^∞ bzw. Y^∞ sind. Nach Bemerkung 2.14 ist X^∞ bzw. Y^∞ ein Suslin-

Raum und deshalb ist $X^\infty \times Y^\infty$ wieder Suslin. Bekanntlich ist jeder polnische Raum Lindelöfsch (siehe DUGUNDJI [1, Ch. VIII, 6, Ex. 3]),

und jeder Suslin-Raum ist, als stetige Surjektion eines Linde-

löfschen Raumes, wieder Lindelöfsch (s. DUGUNDJI [1, Ch. VIII, 6.6Th]).

Also ist $X^\infty \times Y^\infty$ Lindelöfisch und deswegen existiert eine abzählbare Teilfamilie $(B_n \times D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(B_i \times D_i)_{i \in I}$ mit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \times D_n$, woraus $A \in \mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty)$ folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach der Behauptung und nach (i) folgt, daß die Räume $(s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n), \mathcal{M}_{s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)})$ und $(X^\infty \times Y^\infty, \mathcal{M}_{X^\infty \otimes Y^\infty})$ isomorph sind, oder daß die Räume $s.\lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times Y_n)$ und $X^\infty \times Y^\infty$ Borel-isomorph sind.

7.1.3 Proposition

Es seien die Voraussetzungen der Proposition 7.1.1 und zusätzl. $J=I$, $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein induktives System von $\mathcal{B}(X_\alpha)$ - $\mathcal{B}(Y_\alpha)$ -meßbaren Abbildungen $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ und $\lambda_{\beta\alpha} := \varphi_{\beta\alpha} \times \psi_{\beta\alpha} \big|_{\text{Gr}(h_\alpha)}$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$.

Dann gilt:

- I) Die Familie $(\text{Gr}(h_\alpha), \lambda_{\beta\alpha}, \mathcal{B}(\text{Gr}(h_\alpha)))_{\alpha \leq \beta \in I}$ ist ein induktives System von topologischen meßbaren Räumen.
- II) Es existiert genau eine Abbildung $k : \varinjlim_{\alpha \in I} \text{Gr}(h_\alpha) \rightarrow \text{Gr}(h)$, wobei $h : X^\infty \rightarrow Y^\infty$ der induktive Limes von $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist, mit folgenden Eigenschaften:
 - a) k ist der induktive Limes von $(\varphi_\alpha \times \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$,
 - b) k ist bijektiv
 - c) k ist $\varinjlim_{\alpha \in I} \text{Gr}(h_\alpha) - \text{Gr}(h) \cap (\mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty))$ -meßbar.

Beweis:

Offensichtlich gilt $\lambda_{\beta\alpha}(\text{Gr}(h_\alpha)) \subseteq \text{Gr}(h_\beta)$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$. Daraus nach Proposition 7.1.1 und nach 1.8 in DUGUNDJI [1, Appendix two] folgt die Behauptung (I) der Proposition.

Es gilt $(\varphi_\alpha \times \psi_\alpha)(x_\alpha, y_\alpha) \in \text{Gr}(h)$ für jedes $(x_\alpha, y_\alpha) \in \text{Gr}(h_\alpha)$,
und $\varphi_\alpha \times \psi_\alpha = (\varphi_\beta \times \psi_\beta) \circ \lambda_{\beta\alpha}$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$. Daraus folgt,
daß genau eine Abbildung k von $\varinjlim_{\alpha \in I} \text{Gr}(h_\alpha)$ nach $\text{Gr}(h)$ existiert,
so daß k der induktive Limes von $(\varphi_\alpha \times \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist.

Der Beweis, daß k bijektiv und $\varprojlim_{\alpha \in I} \text{Gr}(h_\alpha)^{-\text{Gr}(h)} \cap (\mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty))$ -meßbar ist, verläuft ähnlich wie der von Proposition 7.1.1.
Folgendes beantwortet die Frage nach dem Borel-Isomorphismus
von $\varinjlim_{\alpha \in I} \text{Gr}(h_\alpha)$ und $\text{Gr}(h)$:

7.1.4 Proposition

Es seien $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ bzw. $Y^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ in Top, wobei alle
Räume X_n bzw. Y_n polnisch sind, und X_n bzw. Y_n abgeschlossene
Teilmenge von X^∞ bzw. Y^∞ sind.

Dann gilt: Sind $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System von $\mathcal{B}(X_n)$ -
- $\mathcal{B}(Y_n)$ -meßbaren Abbildungen und $h = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} h_n$, so sind die
Räume $\text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(h_n)$ und $\text{Gr}(h)$ Borel-isomorph.

Beweis:

Nach Proposition 7.1.3 existiert eine bijektive Abbildung

$k : \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(h_n) \longrightarrow \text{Gr}(h)$, die

$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(h_n)^{-\text{Gr}(h)} \cap (\mathcal{B}(X^\infty) \otimes \mathcal{B}(Y^\infty))$ -meßbar ist. Daraus

und nach Satz 3.3.3 ist $k : \mathcal{B}(\text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(h_n)) \longrightarrow \mathcal{B}(\text{Gr}(h))$ -meßbar.

Die $\mathcal{B}(\text{Gr}(h))$ - $\mathcal{B}(\text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Gr}(h_n))$ -Meßbarkeit von k^{-1} folgt ähn-
lich wie bei dem Beweis der Proposition 7.1.2.

7.2 Eine Charakterisierung der Meßbarkeit einer Abbildung durch ihren Graph

J.J. Buckley hat 1974 folgendes bewiesen:

7.2.1 Satz (Buckley [1])

Es seien $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ein polnischer Maßraum, $(X, \mathcal{B}(X)_\mu, \bar{\mu})$ seine Vervollständigung und Y ein polnischer meßbarer Raum.

Dann sind für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ folgende Aussagen äquivalent:

- I) f ist $\mathcal{B}(X)_\mu$ - $\mathcal{B}(Y)$ -meßbar
- II) $\text{Gr}(f) \in \mathcal{B}(X)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)$.

7.2.2 Satz

Es seien $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{B}(X^\infty), \mu) = \text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, j_{nm}, \mathcal{B}(X_n), \mu_n)_{m \leq n \in \mathbb{N}}$, in $\mathcal{M}_{\text{top}}$, wobei alle $(X_n, \mathcal{B}(X_n), \mu_n)$ polnische Maßräume mit X_n abgeschlossenen Teilmengen von X^∞ sind, und Y ein polnischer Raum.

Dann sind für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ folgende Aussagen äquivalent:

- I) f ist $\mathcal{B}(X)_\mu$ - $\mathcal{B}(Y)$ -meßbar
- II) $\text{Gr}(f) \in \mathcal{B}(X)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Es sei vermerkt, daß der Raum X^∞ i.a. kein polnischer Raum ist.

Um diesen Satz beweisen zu können, brauchen wir zunächst zwei Propositionen.

7.2.3 Proposition

Es seien $(X^\infty, (f_\alpha)_{\alpha \in I}, \mathcal{M}, \mu) = \lim_{\alpha \in I} (X_\alpha, f_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ in $\mathcal{M}$, $(X_\alpha, (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha}, \bar{\mu}_\alpha)$ die Vervollständigung von $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$ für alle $\alpha \in I$ und

$$\hat{\mathcal{M}} := \{ A \subseteq X^\infty \mid f_\alpha^{-1}(A) \in (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha} \text{ für jedes } \alpha \in I \}.$$

Dann gilt:

- i) Die Familie $(X_\alpha, f_{\beta\alpha}, (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha}, \bar{\mu}_\alpha)_{\alpha \leq \beta \in I}$ ist ein induktives System in $\mathcal{M}$.
- ii) Ist $(X^\infty, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha, (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha}, \bar{\mu}_\alpha)$ in $\mathcal{M}$, so gilt
 - a) Der Maßraum $(X^\infty, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu})$ ist vollständig.
 - b) $\mathcal{M}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{M}}$
 - c) $\hat{\mu}|_{\mathcal{M}_\mu} = \bar{\mu}$

Beweis:

- i): Sei $A \in (\mathcal{M}_\beta)_{\mu_\beta}$. Es existiert eine Menge $B \in \mathcal{M}_\beta$ und eine Teilmenge N einer μ_β -Nullmenge N_1 mit $A = B \cup N$.
Daraus ergibt sich:
 $f_{\beta\alpha}^{-1}(A) = f_{\beta\alpha}^{-1}(B) \cup f_{\beta\alpha}^{-1}(N)$, $f_{\beta\alpha}^{-1}(N) \subseteq f_{\beta\alpha}^{-1}(N_1)$ und
 $\mu_\alpha \circ f_{\beta\alpha}^{-1}(N_1) \leq \mu_\beta(N_1) = 0$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$, woraus
 $f_{\beta\alpha}^{-1}(A) \in (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha}$ für alle $\alpha \leq \beta \in I$ folgt.
 Also sind alle $f_{\beta\alpha}$ für $\alpha \leq \beta \in I$ $(\mathcal{M}_\alpha)_\mu - (\mathcal{M}_\beta)_\mu$ -meßbar und
 damit ist die Behauptung (i) der Proposition bewiesen.

ii)a): Siehe Satz 5.2.2 i) und Bemerkung 5.2.3.

- b): Es sei $A \in \mathcal{M}_\mu$. Es existiert eine Menge $B \in \mathcal{M}$ und eine Teilmenge N einer μ -Nullmenge N_1 mit $A = B \cup N$. Daraus folgt:
 $f_\alpha^{-1}(A) = f_\alpha^{-1}(B) \cup f_\alpha^{-1}(N)$ und $f_\alpha^{-1}(N) \subseteq f_\alpha^{-1}(N_1)$ für jedes $\alpha \in I$.
 Nach Satz 3.1.2 ii) ergibt sich:
 $\mu_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(N_1) \leq \mu(N_1) = 0$ für jedes $\alpha \in I$,
 woraus $f_\alpha^{-1}(A) \in (\mathcal{M}_\alpha)_{\mu_\alpha}$ für jedes $\alpha \in I$ folgt.
 Also gilt $A \in \hat{\mathcal{M}}$ und deshalb $\mathcal{M}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{M}}$.

c): Es seien A, B, N, N_1 wie in b). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(A) &= \bar{\mu}(B \cup N) = \mu(B) = \lim_{\alpha \in I} \mu_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(B) = \lim_{\alpha \in I} \bar{\mu}_{\alpha} \circ f_{\alpha}^{-1}(B \cup N) = \\ &= \hat{\mu}(B \cup N) = \hat{\mu}(A) \text{ und damit ist die Behauptung c) bewie-} \\ &\text{sen.}\end{aligned}$$

Folgendes beantwortet die Frage nach der Gleichheit von

$$\mathcal{M}_{\mu}, \hat{\mathcal{M}} \text{ und } \mathcal{B}(X^{\infty})_{\mu}.$$

7.2.4 Proposition

Es seien $(X^{\infty}, \mathcal{M}, \mu) = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{B}(X_n), \mu_n)$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$,
 $(X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\mu_n}, \bar{\mu}_n)$ die Vervollständigung von $(X_n, \mathcal{B}(X_n), \mu_n)$
 für alle $n \in \mathbb{N}$, $(X^{\infty}, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu}) = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \mathcal{B}(X_n)_{\mu_n}, \bar{\mu}_n)$ in $\mathcal{M}_{\text{top}}$
 und $(X^{\infty}, \mathcal{M}_{\mu}, \bar{\mu})$ die Vervollständigung von $(X^{\infty}, \mathcal{M}, \mu)$.

Dann gilt:

- i) $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{\mu} = \mathcal{B}(X)_{\mu}$.
- ii) $\hat{\mu} = \bar{\mu}$

Beweis:

Nach Satz 3.3.3 folgt $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X^{\infty})$ und deshalb $\mathcal{M}_{\mu} = \mathcal{B}(X^{\infty})_{\mu}$.

Es muß noch bewiesen werden $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{\mu}$.

Nach Proposition 7.2.3 folgt $\mu -$ (1)

Sei $A \in \hat{\mathcal{M}}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}A \cap X_n &\in \mathcal{B}(X_n)_{\mu_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ A \cap X_n &= B_n \cup N_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\end{aligned} \quad (2)$$

wobei $B_n \in \mathcal{B}(X_n)$ und N_n eine Teilmenge einer μ_n -Nullmenge N'_n sind. Daraus, nach Satz 3.3.3 und nach Satz 3.1.2 ergibt sich, daß zu jedem B_n bzw. N_n bzw. N'_n ein $B \in \mathcal{B}(X)$ bzw. $N \subseteq X^{\infty}$ bzw. eine μ -Nullmenge N' existiert, so daß $B \cap X_n = B_n$ bzw.

$N \cap X_n = N_n$ bzw. $N' \cap X_n = N'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hieraus und nach (2) folgt

$$A = B \cup N$$

Also gilt $A \in \mathcal{M}_\mu$ und deshalb $\hat{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ (3)

Nach (1) und (3) ergibt sich die Behauptung i).

ii) ist offensichtlich.

Beweis des Satzes 7.2.2

(I) $\Rightarrow$ (II): Da $\text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ein Suslin Raum ist (vgl. Bemerkung 2.13), ist diese Implikation wohlbekannt.

(II) $\Rightarrow$ (I): Sei $\text{Gr}(f) \in \mathcal{B}(X^\infty)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Gr}(f) \cap (X_n \times Y) &\in (\mathcal{B}(X^\infty)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)) \cap (X_n \times Y) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ \text{Gr}(f_n) &\in (\mathcal{B}(X^\infty)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)) \cap (X_n \times Y) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (i)$$

Nach Proposition 7.2.4 folgt:

$$(\mathcal{B}(X^\infty)_\mu \otimes \mathcal{B}(Y)) \cap (X_n \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X_n)_{\mu_n} \otimes \mathcal{B}(Y) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus und nach (i) ergibt sich die Relation

$$\text{Gr}(f_n) \in \mathcal{B}(X_n)_{\mu_n} \otimes \mathcal{B}(Y) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus und nach Satz 7.2.1 folgt die $\mathcal{B}(X_n)_{\mu_n}$ - $\mathcal{B}(Y)$ -Meßbarkeit von f_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hieraus und nach Proposition 7.2.4 folgt die $\mathcal{B}(X^\infty)_\mu$ - $\mathcal{B}(Y)$ -Meßbarkeit von f .

7.2.5 Bemerkung

Satz 7.2.2 ist für den Fall, daß μ σ -endlich ein Spezialfall eines Resultates von Saint-Beuve (siehe Saint-Beuve [1,3, Cor.1]).

§ 8. Meßbare Korrespondenzen

8.1 Ein Permanenzsatz für meßbare Schnitte und einige Lemmata

8.1.1 Definitionen

Seien X und Y beliebige Mengen. Eine Korrespondenz F von X nach Y ist eine Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ mit $F(x) \neq \emptyset$ für jedes $x \in X$.

Für $A \subseteq X$ sei $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$ das Bild von A unter F .

Für $B \subseteq Y$ sei $F^{-1}(B) := \bigcup_{y \in B} \{ x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset \}$ das Urbild von B unter F .

Der Graph von F , in Zeichen $\text{Gr}F$, ist durch

$$\text{Gr}F := \{ (x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x) \}$$

definiert.

8.1.2 Definitionen

Seien $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, X ein topologischer Raum und

$F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ eine Korrespondenz von X nach Y .

- i) F heißt punktabgeschlossen, falls für alle $x \in X$ die Menge $F(x)$ abgeschlossen ist.
- ii) F heißt meßbar bzw. schwach-meßbar bzw. kompakt-meßbar bzw. Borel-meßbar, falls $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für jedes $B \in \mathcal{F}(X)$ bzw. $B \in \mathcal{O}(X)$ bzw. $B \in \mathcal{K}(X)$ bzw. $B \in \mathcal{B}(X)$.
- iii) Eine Abbildung $f : T \rightarrow X$ heißt ein Schnitt von F , falls $f(t) \in F(t)$ für alle $t \in T$.
Mit $\mathcal{S}(F)$ wird die Menge aller meßbaren Schnitte von F bezeichnet.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}(F)$ heißt eine Castaing-Darstellung von F , falls die Menge $\{ f_1(t), f_2(t), \dots \}$ dicht in $F(t)$ für alle $t \in T$ liegt.

Alle oben genannten Definitionen und Begriffe sind in WAGNER [1] und [2] zu finden.

Weiterhin sind einige für das folgende wichtige Lemmata bewiesen.

8.1.3 Lemma

Es seien $X^\infty = \text{s.}\lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n metrische Räume und abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit $F(t) \cap X_n$ kompakt für alle $t \in T$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist F meßbar genau dann, wenn F schwach meßbar ist.

Beweis:

Seien F meßbar und $U \in \mathcal{O}(X^\infty)$. Dann gilt:

$U \cap X_n \in \mathcal{O}(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$U \cap X_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m,n}$, wobei $A_{m,n} := \{x \in X_n \mid d_n(x, X_n \setminus (U \cap X_n)) \geq \frac{1}{m}\}$

Daraus ergibt sich $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m,n}$ und $F^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F^{-1}(A_{m,n})$.

Hieraus und nach der Meßbarkeit von F folgt $F^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

Also ist F schwach-meßbar.

Seien jetzt F schwach-meßbar und $B \in \mathcal{F}(X)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $B \cap X_{n_0} \neq \emptyset$ und $B \cap X_{n_0} \in \mathcal{F}(X_{n_0})$.

Daraus folgt $B \cap X_n \neq \emptyset$ und $B \cap X_n \in \mathcal{F}(X_n)$ für alle $n \geq n_0$ und

$X_n \setminus B \cap X_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{m,n}$, wobei

$B_{m,n} := \{x \in X_n \mid d_n(x, B \cap X_n) \geq \frac{1}{m}\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und

$n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$. Hieraus ergibt sich

$B \cap X_n = X_n \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{m,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$,

woraus

$B = X^\infty \setminus \bigcup_{n \geq n_0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{m,n}$ folgt.

Behauptung 1:

Für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $t \in T$ gilt:

$$F(t) \cap B \cap X_n \neq \emptyset \iff F(t) \cap (X_n \setminus B_{m,n}) \neq \emptyset \text{ für jedes } m \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Klar

" $\Leftarrow$ ": Sei $x_m \in F(t) \cap (X_n \setminus B_{m,n})$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann gehört jeder Häufungspunkt von $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $B \cap X_n$ und wegen der Kompaktheit von $F(t) \cap X_n$ in $F(t) \cap X_n$.

Behauptung 2:

Für jedes $t \in T$ gilt:

$$B \cap F(t) \neq \emptyset \quad \text{für jedes } m \in \mathbb{N} \text{ und für schließlich alle } n \in \mathbb{N}$$

$$F(t) \cap (X^\infty \setminus B_{m,n}) \neq \emptyset.$$

Beweis:

Es sei $t \in T$. Dann ist $F(t) \cap B \neq \emptyset$ äquivalent zu:

$F(t) \cap B \cap X_n \neq \emptyset$ für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$, oder (nach Beh. 1):
 $F(t) \cap (X_n \setminus B_{m,n}) \neq \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und schließlich alle $n \in \mathbb{N}$,
 oder:

Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ $F(t) \cap (X^\infty \setminus (\bigcup_{n \geq n_1} B_{m,n})) \neq \emptyset$, oder:

Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ $F(t) \cap (X^\infty \setminus B_{m,n}) \neq \emptyset$.

Nach Behauptung 2 folgt

$$F^{-1}(B) = \bigcup_{n \geq n_1} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F^{-1}(X^\infty \setminus B_{m,n}) \quad (i)$$

Nach der Schwach-Meßbarkeit von F ergibt sich

$$F^{-1}(X^\infty \setminus B_{m,n}) \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } m \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq n_1.$$

Daraus und nach (i) folgt:

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

8.1.4 Bemerkung

In HIMMELBERG [1, Th.3.1] ist das gleiche Resultat bewiesen worden, für den Fall, daß $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, X ein metrischer Raum und F eine Korrespondenz von T nach X mit kompakten Werten ist.

8.1.5 Lemma

Es seien $(T, \mathcal{A})$ und $X^\infty = \text{s.}\varinjlim X_n$ wie bei Lemma 8.1.3 und $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakt-meßbaren punktabgeschlossenen Korrespondenzen F_m von T nach X .

Dann ist die Korrespondenz $F = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$ von T nach X^∞ , definiert durch $F(t) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m(t)$, kompakt-meßbar.

Beweis:

Alle Korrespondenzen F_m sind kompakt-meßbar, und alle X_n sind abgeschlossene Teilmengen von X^∞ . Daraus ergibt sich, daß alle Korrespondenzen $F_{m,n}$ von T nach X_n , definiert durch $F_{m,n}(t) := F_m(t) \cap X_n$; für jedes $t \in T$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, kompakt-meßbar sind. Hieraus und nach HIMMELBERG, PARTHASARATHY und VAN VLECK [1, Th.3.4] folgt, daß die Korrespondenzen $F_n := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{m,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakt-meßbar sind.

Behauptung 1:

Für jedes $K \in \mathcal{K}(X^\infty)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$K_n := K \cap X_n \in \mathcal{K}(X_n).$$

Beweis mit Hilfe des Lemmas 2.2.

Behauptung 2:

Alle Korrespondenzen $j_n \circ F_n$ von T nach X^∞ sind kompakt-meßbar.

Der Beweis der Behauptung 2 folgt nach der Kompakt-Meßbarkeit der Korrespondenzen F_n und nach Behauptung 1.

Offensichtlich gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} j_n \circ F_n = F$. Daraus, nach Behauptung 2 und nach HIMMELBERG [1, Prop.2.3] ergibt sich die Behauptung des Lemmas.

8.1.6 Bemerkung

Lemma 8.1.5 verallgemeinert Theorem 3.4 in HIMMELBERG, PARTHASARATHY und VAN VLECK [1], welches folgendes besagt:
Ist X ein metrischer Raum, $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakt-meßbarer punktabgeschlossener Korrespondenzen F_n von T nach X , so ist $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ wieder kompakt-meßbar.

8.1.7 Satz

Es seien $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $X^\infty = \text{s.} \lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Top, wobei alle X_n abgeschlossene Teilmengen von X^∞ .

Sei außerdem, daß jede punktabgeschlossene meßbare Korrespondenz von einem meßbaren Raum nach X_n für $n \in \mathbb{N}$ einen meßbaren Schnitt hat. Dann hat jede punktabgeschlossene meßbare Korrespondenz F von T nach X^∞ einen meßbaren Schnitt.

Beweis:

Es seien $T_n := F^{-1}(X_n) \setminus \bigcup_{\substack{m < n \\ m \in \mathbb{N}}} F^{-1}(X_m)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die

Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von T , die aus meßbaren, paarweise disjunkten Teilmengen von T besteht.

Definiere $\mathcal{A}_n := \{ B \cap T_n \mid B \in \mathcal{A} \}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{A}_n$ eine σ -Algebra von Teilmengen von T_n mit $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin definiere eine Korrespondenz F_n von T_n nach X_n durch $F_n(t) := F(t) \cap X_n$; $t \in T_n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $F_n(t)$ sind für alle $t \in T_n$ und für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$ nicht leere abgeschlossene Teilmengen von X_n .

Offensichtlich ist jede Korrespondenz F_n meßbar, und folglich existiert zu jedem F_n ein $\mathcal{A}_n$ - $\mathcal{B}(X_n)$ -meßbarer Schnitt f_n . Daraus und nach Satz 3.3.3 ergibt sich die $\mathcal{A}_n$ - $\mathcal{B}(X^\infty)$ -Meßbarkeit von f_n . Hieraus folgt, daß die durch $f(t) := f_n(t)$ für $t \in T$ definierte Abbildung ein $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(X)$ -meßbarer Schnitt von F ist. Folgendes verallgemeinert teilweise den Satzsatz in KURATOWSKI und RYLL-NARDZEWSKI [1].

8.1.8 Korollar

Es seien $(T, \mathcal{A})$ wie in Satz 8.1.7 und $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei X_n separabel vollständige metrische Räume sind.

Dann hat jede punktabgeschlossene meßbare Korrespondenz F von T nach X^∞ einen meßbaren Schnitt.

Beweis:

Jedes X_n ist abgeschlossen in X^∞ . Daraus und nach KURATOWSKI und RYLL-NARDZEWSKI [1] folgt, daß alle Voraussetzungen des Satzes 8.1.7 erfüllt sind.

8.2 Ein Satz von Filippovschen Typ

8.2.1 Satz (Kontinuumshypothese)

Es seien $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n separabel metrische Räume und abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, Y ein topologischer Hausdorffscher Raum, Γ eine punktabgeschlossene kompakt-meßbare Korrespondenz von T nach X^∞ , $f : X^\infty \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $g : T \rightarrow Y$ eine kompakt-meßbare Abbildung mit $g(t) \in f(\Gamma(t))$ für alle $t \in T$.

Dann existiert ein kompakt-meßbarer Schnitt γ von Γ mit $g(t) = f(\gamma(t))$ für alle $t \in T$.

Um diesen Satz beweisen zu können, brauchen wir u.a. folgendes Resultat:

8.2.2 Satz (HIMMELBERG und VAN VLECK [1, Th.2])

Es seien $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und X ein topologischer Hausdorffscher Raum, der die Vereinigung von Ω (= die erste überabzählbare Ordinalzahl) vielen kompakten metrisierbaren Teilräumen X_α ist, so daß jede kompakte Teilmenge von X in der Vereinigung abzählbar vieler X_α ; $\alpha \leq \Omega$ enthalten ist. Sei außerdem F eine punktabgeschlossene kompakt-meßbare Korrespondenz von T nach X .

Dann hat F einen kompakt-meßbaren Schnitt.

Beweis des Satzes 8.2.1:

Sei die Korrespondenz F von T nach X^∞ , definiert durch $F(t) := f^{-1}(g(t))$ für alle $t \in T$. Dann ist F eine punktabgeschlossene kompakt-meßbare Korrespondenz. Offensichtlich gilt $F(t) \cap \bigcap (t) \neq \emptyset$ für alle $t \in T$, und deshalb ist $F \cap \bigcap$ eine (punktabgeschlossene) Korrespondenz von T nach X^∞ .

Behauptung 1:

$F \cap \bigcap$ ist kompakt-meßbar.

Beweis nach der Kompakt-Meßbarkeit von F und $\bigcap$ und nach Lemma 8.1.5.

Behauptung 2:

$X^\infty = \bigcup_{\alpha \leq \Omega} K_\alpha$, wobei K_α kompakte metrisierbare Teilräume von X^∞ sind, so daß jede kompakte Teilmenge von X^∞ in der Vereinigung abzählbar vieler K_α enthalten ist.

Beweis:

Nach einem Argument in MAC SHANE und WARFIELD [1] gilt:

$$X_n = \bigcup_{\alpha \in \Omega} K_{\alpha, n} \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei $(K_{\alpha, n})_{\alpha \in \Omega}$ die Familie aller kompakten Teilmengen von X_n ist.

Daraus ergibt sich: $X^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in \Omega} K_{\alpha, n}$, wobei alle $K_{\alpha, n}$ kompakte metrisierbare Teilräume von X^∞ sind.

Nach Lemma 2.6 ist der topologische Raum X^∞ Hausdorffsch. Daraus, nach Behauptung 1 und 2 folgt, daß alle Voraussetzungen des Satzes 8.2.2 erfüllt sind, und deshalb ein kompakt-meßbarer Schnitt von $F \cap \Gamma$ existiert.

Also existiert ein kompakt-meßbarer Schnitt γ von Γ , und es gilt:

$$\gamma(t) \in F(t) = f^{-1}(g(t)), \text{ oder}$$

$$f(\gamma(t)) = g(t) \text{ für alle } t \in T.$$

8.2.3 Bemerkung

Der Satz 8.2.1 verallgemeinert folgendes Resultat, welches in HIMMELBERG [1] zu finden ist:

Unter der Kontinuumshypothese gilt:

Ist X ein separabler metrischer Raum, Y ein topologischer Hausdorffscher Raum, $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, Γ eine punktabgeschlossene kompakt-meßbare Korrespondenz von T nach X und $g : T \rightarrow Y$ eine kompakt-meßbare Abbildung mit $g(t) \in f(\Gamma(t))$ für alle $t \in T$, so existiert ein kompakt-meßbarer Schnitt γ von Γ mit $g(t) = f(\gamma(t))$ für alle $t \in T$.

8.3 Zur Parametrisierung von meßbaren Korrespondenzen

8.3.1 Punktabgeschlossene Korrespondenzen

8.3.1.1 Definitionen

Es seien $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, Y, Z zwei topologische Räume und $A \subseteq T \times Y$. Eine Abbildung $f : A \rightarrow Z$ heißt eine Carathéodory-Abbildung, falls $f(t, \cdot) : \text{pr}_Y(A) \rightarrow Z$ stetig für alle $t \in \text{pr}_T(A)$ und $f(\cdot, y) : \text{pr}_T(A) \rightarrow Z$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(Z)$ -meßbar für alle $y \in \text{pr}_Y(A)$ ist, wobei pr_T bzw. pr_Y die kanonische Projektion von $T \times Y$ auf T bzw. Y ist. Sei ferner eine Korrespondenz F von T nach Z . Das Paar (Y, f) induziert F , falls $F(t) = f(t, Y)$ für $t \in T$.

8.3.1.2 Satz (IOFFE [1])

Sind $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, X ein polnischer Raum und F eine meßbare punktabgeschlossene Korrespondenz von T nach X , so existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times \Sigma \rightarrow X$, wobei $\Sigma := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die Menge der irrationalen Zahlen ist, versehen mit der Produkttopologie der auf $\mathbb{N}$ diskreten Topologie, so daß (Σ, f) die Korrespondenz F induziert.

Im folgenden wird Satz 8.3.1.2 auf strikten induktiven Limiten von polnischen Räumen verallgemeinert.

8.3.1.3 Satz

Sind $(T, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $X^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n polnische Räume und abgeschlossenen Teilmengen von X^∞ sind, und F eine punktabgeschlossene meßbare Korrespondenz von T nach X^∞ , so existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times \Sigma \rightarrow X^\infty$, so daß (Σ, f) die Korrespondenz F induziert.

Beweis:

Seien $T_n, \mathcal{A}_n$ und F_n für $n \in \mathbb{N}$ wie im Beweis des Satzes 8.1.7.

Dann erfüllen $(T_n, \mathcal{A}_n)$, X_n und F_n für $n \in \mathbb{N}$ die Voraussetzungen des Satzes 8.3.1.2 und deshalb existiert eine Carathéodory-Abbildung $f_n : T_n \times \Sigma \longrightarrow X_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so daß (Σ, f_n) die Korrespondenz F_n induziert.

Definiere weiter $f : T \times \Sigma \longrightarrow X^\infty$ durch $f(t, \sigma) = f_n(t, \sigma)$ für $\sigma \in \Sigma$ und $t \in T_n$. Offensichtlich ist f eine Carathéodory-Abbildung, und (Σ, f) induziert F .

8.3.1.4 Bemerkungen

- i) In SRIVASTAVA [1] ist Satz 8.3.1.2 für schwach-meßbare punkt-abgeschlossene Korrespondenzen bewiesen worden. Satz 8.3.1.3 verallgemeinert teilweise den Satz von Srivastava.
- ii) Als Korollar zu Satz 8.3.1.3 kann wieder Korollar 8.1.8 bewiesen werden.

8.3.2 Korrespondenzen mit σ -kompakten Werten

8.3.2.1 Satz (SRIVASTAVA [2, Th.1.2])

Es seien T ein analytischer Raum, X ein polnischer Raum und F eine Korrespondenz von T nach X mit σ -kompakten Werten (d.h.: für jedes $t \in T$ ist $F(t)$ die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen), so daß $\text{Gr}(F) \in \mathcal{B}(T \times X)$.

Dann existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times (\mathbb{N} \times \Delta) \longrightarrow X$, wobei Δ der Cantorsche Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist, so daß $(\mathbb{N} \times \Delta, f)$ die Korrespondenz F induziert.

Im folgenden Satz kann man auf die Voraussetzung, daß X metrisch ist, verzichten.

8.3.2.2 Satz

Es seien T analytisch, $X^\infty = \text{s.}\lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n polnische Räume und abgeschlossene Teilmengen von X^∞ sind, F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit allen $F(t) \cap X_n$ σ -kompakt und $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$.

Dann existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times \mathbb{N} \times \Delta \longrightarrow X^\infty$, so daß $(\mathbb{N} \times \Delta, f)$ die Korrespondenz F induziert.

Zum Beweis des Satzes brauchen wir folgenden Projektionssatz von Arsenin und Kunigui (siehe SRIVASTAVA [2, Th. 2.3]).

8.3.2.3 Satz

Es seien T ein analytischer Raum und X ein polnischer Raum.

Ist $B \in \mathcal{B}(T \times X)$ und jeder Schnitt $B^t := \{x \in X \mid (t, x) \in B\}$ von B σ -kompakt, so gilt $\text{pr}_T(B) \in \mathcal{B}(T)$.

Beweis des Satzes 8.3.2.2:

Behauptung:

Es gilt $\text{Gr}F \cap (T \times X_n) \in \mathcal{B}(T \times X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und die Menge $(\text{Gr}F \cap (T \times X_n))^t$ ist für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in T$ σ -kompakt.

Beweis:

Nach Satz 3.3.3 gilt $\mathcal{B}(T \times X^\infty) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(T \times X_n)$, woraus $\text{Gr}F \cap (T \times X_n) \in \mathcal{B}(T \times X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Andererseits gilt $(\text{Gr}F \cap (T \times X_n))^t = F(t) \cap X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t \in T$, woraus die σ -Kompaktheit von $(\text{Gr}F \cap (T \times X_n))^t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Definiere die Mengen:

$$T_1 := \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_1)) \text{ und}$$

$$T_n := \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_n) \setminus \bigcup_{m < n} \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_m)) \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Dann ist die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von T .

Weiterhin gilt nach der Behauptung und nach Satz 8.3.2.3

$T_n \in \mathcal{B}(T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus folgt, daß alle T_n analytische Räume sind (siehe SCHWARTZ [1, Ch.II,Th.3]).

Definiere ferner eine Korrespondenz F_n von T_n nach X_n durch

$F_n(t) := F(t) \cap X_n$ für $t \in T_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nach der Behauptung hat

F_n σ -kompakte Werte.

Also sind alle Voraussetzungen des Satzes 8.3.2.1 für T_n , X_n , F_n erfüllt, und deshalb existiert eine Carathéodory-Abbildung

$f_n : T_n \times (\mathbb{N} \times \Delta) \rightarrow X_n$, so daß $(\mathbb{N} \times \Delta, f_n)$ die Korrespondenz F_n für alle $n \in \mathbb{N}$ induziert.

Schließlich ist die Abbildung $f : T \times \mathbb{N} \times \Delta \rightarrow X^\infty$, definiert durch

$f(t, m, \alpha) := f_n(t, m, \alpha)$ für $t \in T_n$; $n \in \mathbb{N}$, eine

Carathéodory-Abbildung, so daß $(\mathbb{N} \times \Delta, f)$ die Korrespondenz F induziert.

8.3.2.4 Korollar

Es seien T , X^∞ und F wie in Satz 8.3.2.2.

Dann existiert ein meßbarer Schnitt von F .

Beweis:

Nach Satz 8.3.2.2 existiert eine Carathéodory-Abbildung

$f : T \times \mathbb{N} \times \Delta \rightarrow X^\infty$, woraus folgt, daß die Abbildung

$f(., m, \alpha) : T \rightarrow X^\infty$ für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Delta$ ein meßbarer Schnitt von F ist.

8.3.2.5 Bemerkung

Korollar 8.3.2.4 verallgemeinert folgenden Satzsatz in BROWN und PURVES [1, Th.1].

Es seien T, X zwei polnische Räume und F eine Korrespondenz von T nach X mit σ -kompakten Werten und $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X)$. Dann hat F einen meßbaren Schnitt.

8.3.2.6 Satz

Es seien $T, X^\infty = \text{s.}\lim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ wie in Satz 8.3.2.2, und F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit $F(t) \cap X_n$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}, t \in T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$.
- (b) F hat eine Castaing-Darstellung.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die dicht in Δ liegt. Nach Satz 8.3.2.2 existiert eine Carathéodory-Abbildung

$f : T \times (\mathbb{N} \times \Delta) \rightarrow X^\infty$. Daraus folgt, daß jede Abbildung

$f_{k,n} := f(., k, \alpha_n) : T \rightarrow X^\infty$ ein meßbarer Schnitt von F ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\{f_{k,n}(t) \mid (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}} &= \overline{f(t, \{(k, \alpha_n) \mid (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\})} \supseteq \\ &\supseteq f(t, \{(k, \alpha_n) \mid (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}) = f(t, \mathbb{N} \times \Delta) = F(t) \text{ für jedes } t \in T. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\overline{\{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}} \supseteq F(t) \text{ für jedes } t \in T \quad (i)$$

Andererseits gilt:

$$\overline{\{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}} \subseteq F(t) = F(t) \text{ für jedes } t \in T.$$

Daraus und nach (i) folgt die Aussage (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Castaing-Darstellung von F . Dann

ist die Korrespondenz U , definiert durch $U(t) := \{f_m(t) \mid m \in \mathbb{N}\}$

für $t \in T$, eine meßbare Korrespondenz. Hieraus folgt, daß die

Korrespondenz $\bar{U}$ von T nach X , definiert durch $\bar{U}(t) := \overline{U(t)}$ für

$t \in T$, schwach meßbar ist. Daraus und nach Lemma 8.1.3 ergibt sich die Meßbarkeit der Korrespondenz F , woraus die Meßbarkeit der Korrespondenz F_n , definiert durch $F_n(t) := F(t) \cap X_n$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt. Hieraus und nach HIMMELBERG [1, Th.3.5] ergibt sich $\text{Gr}F_n \in \mathcal{B}(T \times X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und folglich $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$.

8.3.2.7_Satz

Es seien T ein analytischer Raum, $X^\infty = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n kompakte metrische Räume sind, und F eine punktabgeschlossene Korrespondenz von T nach X^∞ .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$
- (b) Es existiert eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times (\mathbb{N} \times \Delta) \longrightarrow X^\infty$, so daß $(\mathbb{N} \times \Delta, f)$ die Korrespondenz F induziert.
- (c) F hat eine Castaing-Darstellung
- (d) F ist schwach-meßbar
- (e) F ist kompakt-meßbar
- (f) F ist meßbar.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach Satz 8.3.2.2

(b) $\Rightarrow$ (c): Nach Satz 8.3.2.6

(c) $\Rightarrow$ (d): Offensichtlich

(d) $\Rightarrow$ (e): Nach Lemma 8.1.3

(e) $\Rightarrow$ (a): Jede Korrespondenz F_n von T nach X_n , definiert durch $F_n(t) := F(t) \cap X_n$ für $t \in T$, ist punktabgeschlossen und kompakt-meßbar. Also gilt nach HIMMELBERG [1, Th.3.5] $\text{Gr}F_n \in \mathcal{B}(T \times X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich $\text{Gr}F \in \mathcal{B}(T \times X^\infty)$.

(d) $\Leftrightarrow$ (f): Nach Lemma 8.1.3.

8.3.2.8 Korollar (V.L.Levin. Siehe WAGNER [2, Th.12.1])

Es seien T eine Borel-Teilmenge eines polnischen Raumes, X ein σ -kompakter metrischer Raum, und F eine punktabgeschlossene Korrespondenz von T nach X .

Dann sind die Aussagen (a), (b), (c), (d), (e) und (f) des Satzes 8.3.2.7 äquivalent.

Beweis:

Der Raum X kann als ein strikter induktiver Limes von kompakten metrischen Räumen dargestellt werden. Der Raum T ist analytisch, als Borel-Teilmenge eines analytischen Raumes. Also sind alle Voraussetzungen des Satzes 8.3.2.7 erfüllt.

8.3.3 Korrespondenzen mit überabzählbaren Werten

In IOFFE [2, Th.] ist folgendes bewiesen:

8.3.3.1 Satz

Es seien $(T, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher vollständiger Maßraum, X ein überabzählbarer polnischer Raum und F eine Korrespondenz von T nach X mit folgenden Eigenschaften:

- i) Jedes $F(t)$ ist eine überabzählbare Teilmenge von X .
- ii) $\text{Gr} F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$.

Dann existiert ein polnischer Raum Z und eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times Z \rightarrow X$, so daß (Z, f) die Korrespondenz F induziert und die Abbildung $f(t, \cdot) : Z \rightarrow X$ injektiv für alle $t \in T$ ist.

Folgendes verallgemeinert Satz 8.3.3.1 auf strikten induktiven Limiten von überabzählbaren polnischen Räumen.

8.3.3.2 Satz

Es seien $(T, \mathcal{A}, \mu)$ wie in Satz 8.3.3.1, $X^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$, wobei alle X_n überabzählbare polnische Räume sind, F eine Korrespondenz von T nach X^∞ mit allen $F(t) \cap X_n$ überabzählbaren Teilmengen von X_n für $n \in \mathbb{N}$, und $\text{Gr}F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X^\infty)$.

Dann existiert ein polnischer Raum Z und eine Carathéodory-Abbildung $f : T \times Z \longrightarrow X^\infty$, so daß die Abbildung $f(t, \cdot) : Z \longrightarrow X^\infty$ für alle $t \in T$ injektiv ist, und (Z, f) die Korrespondenz F induziert.

Für den Beweis brauchen wir folgenden Projektionssatz, dessen Beweis in SAINTE-BEUVE [1] zu finden ist:

8.3.3.3 Satz

Es seien $(T, \mathcal{A}, \mu)$ wie in Satz 8.3.3.1, X ein analytischer Raum, und $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$. Dann gilt
 $\text{pr}_T(G) \in \mathcal{A}$.

Beweis des Satzes 8.3.3.2:

Es seien $T_1 := \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_1))$ und
 $T_n := \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_n)) \setminus \bigcup_{m < n} \text{pr}_T(\text{Gr}F \cap (T \times X_m))$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nach der Voraussetzung und nach Satz 3.3.3 folgt

$\text{Gr}F \cap (T \times X_n) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus und nach Satz 8.3.3.3 folgt $T_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $\mathcal{A}_n := \{ A \cap T_n \mid A \in \mathcal{A} \}$ und $\mu_n := \mu|_{\mathcal{A}_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind alle $(T_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ σ -endliche vollständige Maßräume, und alle Korrespondenzen F_n von T_n nach X_n , definiert durch $F_n(t) := F(t) \cap X_n$ für $t \in T_n$, haben überabzählbare Werte.

Außerdem gilt $\text{Gr}F_n \in \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{B}(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also sind alle Voraussetzungen des Satzes 8.3.3.1 für $(T_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$, X_n und F_n erfüllt und folglich existiert ein polnischer Raum Z_n und eine Carathéodory-Abbildung $f_n : T_n \times Z_n \longrightarrow X_n$, so daß (Z_n, f_n) die Korrespondenz F_n induziert und die Abbildung $f_n(t, \cdot) : Z_n \longrightarrow X_n$ injektiv für alle $t \in T$ ist.

Definiere schließlich $Z := \sum_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ in Top und $f : T \times Z \longrightarrow X^\infty$ durch $f(t, z) := f_n(t, z)$ für $t \in T_n$.

Dann ist Z polnisch, und f hat die gewünschten Eigenschaften.

TEIL III: FUNKTIONALANALYTISCHE PROBLEME

§ 9. Isomorphie von $C(X)$ -Räumen

Banach stellte 1932 in seinem Buch (siehe BANACH [1]) die Frage, ob die Banach Räume $C(I)$ und $C(I \times I)$ isomorph sind. Das war ein offenes Problem bis 1952, wo Miljutin ein allgemeineres Resultat bewiesen hat, das eine positive Antwort beinhaltet. Was Miljutin bewiesen hat, ist der überraschende Satz, daß alle $C(K)$ -Räume, wobei K ein überabzählbarer, metrisierbarer und kompakter Raum ist, isomorph sind. Ein prototypischer Raum ist $C(\Delta)$, wobei Δ die Cantorsche Menge ist (siehe SEMADENI [1, VI, 21.5.10]).

Ditor hat 1970 eine teilweise Verallgemeinerung des Resultates von Miljutin in DITOR [1] bewiesen.

Etcheberry hat das entsprechende Problem für $C_b(X)$ -Räume, wobei X ein geeigneter topologisch vollständiger metrisierbarer Raum ist, behandelt.

Was hier bewiesen wird ist, daß das Lemma von Miljutin und seine Verallgemeinerung durch Etcheberry verallgemeinert werden können auf Räume, die weder topologisch vollständig noch kompakt noch metrisierbar zu sein brauchen.

9.1 Eine Verallgemeinerung des Lemmas von Miljutin und eines Satzes von Etcheberry

9.1.1 Definition

Es seien X ein topologischer Hausdorffscher Raum und die Halbnormen $p : C_b(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$p_{(a_n), (K_n)}(f) := \sup \{ a_n \|f\|_{K_n} \mid n \in \mathbb{N} \} \quad \text{für } f \in C_b(X),$$

wobei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von kompakten Teilmengen von X bzw. von positiven reellen Zahlen mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Die von diesen Halbnormen erzeugte Topologie heißt

strikte Topologie auf $C_b(X)$ und sie wird mit β bezeichnet

(siehe HOFFMANN-JØRGENSEN [1]).

9.1.2 Bemerkungen

i) Die Norm-Topologie auf $C_b(X)$ ist feiner als die strikte Topologie.

ii) Ist X ein lokalkompakter Raum, so ist die strikte Topologie auf $C_b(X)$ diejenige, die von den Halbnormen

$$p(f) := \|g \cdot f\|; f \in C_b(X),$$

erzeugt wird, wobei g eine stetige im Unendlichen verschwindende Funktion auf X ist.

9.1.3 Definition und Bemerkungen

Es seien X und Y zwei topologische Hausdorffsche Räume und

$\pi : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann definiert man die lineare Abbildung $\pi^0 : C_b(Y) \rightarrow C_b(X)$ folgendermaßen:

$$\pi^0(g) := g \circ \pi \quad \text{für } g \in C_b(Y).$$

Ist π surjektiv, so ist π^0 injektiv und hat Norm Eins. Unter dem Ausdruck "normstetig" bzw. "striktstetig" für eine lineare Abbildung von $C_b(X)$ nach $C_b(Y)$ versteht man die Stetigkeit bzgl. der Norm-Topologie bzw. strikten Topologie auf beiden Räumen.

9.1.4 Definition

Es seien X, Y zwei topologische Hausdorffsche Räume, $\pi : X \rightarrow Y$ eine stetige surjektive Abbildung und $L : C_b(X) \rightarrow C_b(Y)$ eine

lineare Abbildung. L heißt ein Mittelungsoperator (averaging operator) für π (oder für π^0), falls $L \circ \pi^0 = \text{id}_{C_b(X)}$ gilt.
 L heißt ein regulärer Mittelungsoperator, falls zusätzlich $\|L\| = 1$ gilt.

Miljutin hat folgendes, welches als das Lemma von Miljutin bekannt ist, bewiesen:

9.1.5_Satz (siehe SEMADENI [1,VI,21.5.6]).

Es existiert eine stetige surjektive Abbildung $\pi : \Delta \longrightarrow I = [0,1]$, die ein regulärer Mittelungsoperator gestattet.

Etcheberry hat folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Miljutin bewiesen:

9.1.6_Satz (siehe ETCHEBERRY [1,II,5])

Es sei X ein metrisierbarer topologisch vollständiger Raum mit Gewicht $w (w \geq \aleph_0)$. Dann existiert ein null-dimensionaler metrisierbarer, topologisch vollständiger Raum $X_{\mathbb{N}}$, ein abgeschlossener Teilraum von $W^{\mathbb{N}}$ - wobei W ein diskreter Raum mit Gewicht w ist -, so daß folgendes gilt:

Es existiert eine stetige surjektive Abbildung $\pi : X_{\mathbb{N}} \longrightarrow X$, die einen strikt- und normstetigen Mittelungsoperator

$L : C_b(X_{\mathbb{N}}) \longrightarrow C_b(X)$ gestattet.

Insbesondere gilt:

- a) Ist X kompakt, so kann $X_{\mathbb{N}}$ als die Cantorsche Menge Δ gewählt werden.
- b) Ist X lokalkompakt, so kann $X_{\mathbb{N}}$ als der Raum $\Delta \times W'$ gewählt werden, wobei W' ein diskreter Raum mit Gewicht höchstens w ist.

Folgendes verallgemeinert den Satz 9.1.6.

9.1.7 Satz

Es sei $(X^\infty, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, j_{nm})$ in Top, wobei alle (X_n, d_n) lokalkompakte vollständige metrische Räume mit $d_{n+1}|_{X_n \times X_n} = d_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und mit gleichem Gewicht $w \geq \aleph_0$ sind. Dann existiert eine F_σ -Menge $X_\mathbb{N}$ in $W^\mathbb{N}$ - wobei W ein diskreter Raum mit Gewicht w ist -, die der strikte induktive Limes von null-dimensionalen, metrisierbaren, topologisch vollständigen abgeschlossenen Teilräumen von $W^\mathbb{N}$ ist, so daß folgendes gilt: Es existiert eine stetige surjektive Abbildung $\pi : X_\mathbb{N} \rightarrow X^\infty$, die einen strikt- und normstetigen regulären Mittelungsoperator $L : C_b(X_\mathbb{N}) \rightarrow C_b(X^\infty)$ gestattet.

Um diesen Satz beweisen zu können, müssen wir zunächst einige Begriffe erklären und ein Lemma beweisen. Diese Begriffe sind in ETCHEBERRY [1] zu finden.

Es seien w eine Kardinalzahl und W ein diskreter topologischer Raum mit Gewicht w . Sei weiter $W^\mathbb{N} := \{ \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha_n \in W \}$. Man kann auf $W^\mathbb{N}$ eine vollständige Metrik d folgendermaßen definieren:

$$d(\alpha, \beta) := \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_n \neq \beta_n \text{ und } n \text{ der erste Index } i \text{ ist, so daß } \alpha_i \neq \beta_i.$$

$$d(\alpha, \alpha) = 0.$$

Bekanntlich induziert diese Metrik d die Produkttopologie auf $W^{\mathbb{N}}$. Eine offene Basis für die Topologie von $W^{\mathbb{N}}$ besteht aus den Mengen:

$$W_{\beta_1 \dots \beta_n} := \{ \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W^{\mathbb{N}} \mid \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n \}; \beta_n \in W.$$

Die Mengen $W_{\beta_1 \dots \beta_n}$ sind offen und abgeschlossen und deshalb ist der Raum $W^{\mathbb{N}}$ ein null-dimensionaler Raum.

Schließlich sei bemerkt, daß jeder Raum $\Delta \times W$, wobei W ein diskreter Raum mit Gewicht w ist, ein lokalkompakter metrisierbarer topologisch vollständiger Raum mit Gewicht w ($w \geq \mathfrak{S}_0$) ist.

9.1.8 Lemma

Es sei $(X^{\infty}, (j_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, j_{nm})$ wie in Satz 9.1.7.

Dann gilt:

- I) Die Folge $(C_b(X_n), j_{nm}^{\circ})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$, wobei jeder $C_b(X_n)$ mit der von der Familie $\{p_{(a_m), (K_{m,n})} : (a_m) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}, (K_{m,n}) \in K(X_n)^{\mathbb{N}}\}$ der Halbnormen $p_{(a_m), (K_{m,n})}$ (vgl. Definition 9.1.1) erzeugten Topologie versehen ist, ist ein projektives System in S_1 .
- II) Sei $(L, (q_n)_{n \in \mathbb{N}}) = S_1\text{-}\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (C_b(X_n), j_{nm}^{\circ})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$. Dann gilt:
 L ist zu $C_b(X^{\infty})$ strikt isomorph.

Beweis:

- I) Nach ETCHEBERRY [1, II, 1] ist jede j_{nm}° für $n \leq m$ striktstetig. Weiterhin ist der Beweis klar.
- II) Alle Abbildungen $j_n^{\circ} : C_b(X^{\infty}) \rightarrow C_b(X_n)$ sind wieder nach ETCHEBERRY [1, II, 1] striktstetig. Außerdem ist $(j_n^{\circ})_{n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System von Abbildungen. Daraus folgt, daß der projektive Limes $h : C_b(X^{\infty}) \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_n)$ von $(j_n^{\circ})_{n \in \mathbb{N}}$ $\beta\text{-}\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ -stetig ist.

Sei weiter $t = (g_n) \in L$ und definiere eine Abbildung

$g_t : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g_t(x) := g_n(x)$ für $x \in X_n$; $n \in \mathbb{N}$.

Die Abbildung g_t ist stetig. Sei ferner die Abbildung

$G : L \rightarrow C_b(X^\infty)$ definiert durch $G(t) := g_t$ für $t \in L$.

Dann gilt: $G \circ h = \text{id}_{C_b(X^\infty)}$ und $h \circ G = \text{id}_L$ woraus folgt,

daß die Abbildungen G und h bijektiv sind.

Behauptung:

Die Abbildung G ist $\lim_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ - β -stetig.

Beweis:

Es seien $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge von positiven reellen Zahlen,

$(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Teilmengen von X^∞ und

$t = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{(a_m), (K_m)}(G(t)) &= p_{(a_m), (K_m)}(g(t)) = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} p_{(a_m), (K_m \cap X_n)}(j_n(g_t)) = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} p_{(a_m), (K_m \cap X_n)}(q_n(h(g_t))) \leq \\ &\leq q_{(a_m), (K_m)}(h(g_t)) \leq q_{(a_m), (K_m)}(h(G(t))) = \\ &= q_{(a_m), (K_m)}(t), \end{aligned}$$

wobei $q_{(a_m), (K_m)}(t) := \sup_{n \in \mathbb{N}} p_{(a_m), (K_m \cap X_n)}(t)$

Beweis des Satzes 9.1.7:

a) Konstruktion eines null-dimensionalen metrisierbaren topologisch vollständigen abgeschlossenen Teilraumes $X_{\mathbb{N},n}$ von $W^{\mathbb{N}}$ und einer stetigen surjektiven Abbildung $\pi_n: X_{\mathbb{N},n} \longrightarrow X_n$ die einen Mitteilungsoperator L_n gestattet für $n \in \mathbb{N}$ nach ETCHEBERRY [1]

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist d_n eine vollständige Metrik auf X_n . Es existiert eine Familie von (möglicherweise leeren) Teilmengen ${}^nA_{\alpha(1)}$ von X_n für $\alpha(1) \in W$, so daß $\delta_n({}^nA_{\alpha(1)}) \leq 1$, und $({}^nA_{\alpha(1)})_{\alpha(1) \in W}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von X_n ist. Analog überdeckt man jedes $\overline{{}^nA_{\alpha(1)}}$ mit einer Familie $({}^nA_{\alpha(1)\alpha(2)})_{\alpha(2) \in W}$, so daß $\delta_n({}^nA_{\alpha(1)\alpha(2)}) \leq \frac{1}{2}$, und $({}^nA_{\alpha(1)\alpha(2)})_{\alpha(2) \in W}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von $\overline{{}^nA_{\alpha(1)}}$ ist. Durch vollständige Induktion definiert man beim m -ten Schritt eine Familie offener Teilmengen ${}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}$ von $\overline{{}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m-1)}}$ für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha(m) \in W$, so daß $\delta_n({}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}) \leq \frac{1}{2^m}$ und $({}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)})_{\alpha(m) \in W}$ eine lokalendliche offene Überdeckung von $\overline{{}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m-1)}}$ ist.

Also gilt:

$$\overline{{}^nA_{\alpha(1)}} \supseteq \overline{{}^nA_{\alpha(1)\alpha(2)}} \supseteq \overline{{}^nA_{\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)}} \supseteq \dots, \text{ und}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_n({}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}) = 0$$

Sind jetzt alle Mengen $\overline{{}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}}$ nicht leer, so wird durch $\alpha := (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in W^{\mathbb{N}}$ genau ein Punkt $\pi_n(\alpha) \in X_n$ definiert, nämlich $\pi_n(\alpha) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} {}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}$.

Sei schließlich

$$X_{\mathbb{N},n} := \{ \alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in W^{\mathbb{N}} \mid \overline{{}^nA_{\alpha(1) \dots \alpha(m)}} \neq \emptyset, m \in \mathbb{N} \}.$$

Aus der obigen Konstruktion ergibt sich, daß die Abbildung

$$\pi_n : X_{\mathbb{N},n} \longrightarrow X_n \text{ surjektiv ist, und die Relation}$$

$\pi_n(X_{\mathbb{N},n} \cap W_{\beta(1)\beta(2)\dots\beta(m)}) = \overline{nA_{\beta(1)\beta(2)\dots\beta(m)}}$ für $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Daraus folgt die Stetigkeit der Abbildung π_n . Nach ETCHER-BERRY [1] ist $X_{\mathbb{N},n}$ ein null-dimensionaler, metrisierbarer, topologisch vollständiger und abgeschlossener Teilraum von $W^{\mathbb{N}}$.

b) Konstruktion des Raumes $X_{\mathbb{N}}$ und der Abbildung $\pi : X_{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\infty}$

Es existiert eine lokalendliche offene Überdeckung $(A_{\alpha(1)})_{\alpha(1) \in W}$ von X^{∞} mit $\delta_n(A_{\alpha(1)} \cap X_n) \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Lemma 2).

Ebenfalls existiert eine lokalendliche offene Überdeckung

$(A_{\alpha(1)\alpha(2)})_{\alpha(2) \in W}$ von $\overline{s.\lim_{n \in \mathbb{N}} nA_{\alpha(1)}}$ - wobei $nA_{\alpha(1)} := A_{\alpha(1)} \cap X_n$ - mit $\delta_n(A_{\alpha(1)\alpha(2)} \cap \overline{nA_{\alpha(1)}}) \leq \frac{1}{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Durch vollständige Induktion definiert man beim m -ten Schritt

eine lokalendliche offene Überdeckung $(A_{\alpha(1)\dots\alpha(m)})_{\alpha(m) \in W}$

von $\overline{s.\lim_{n \in \mathbb{N}} nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m-1)}}$ - wobei $nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m-1)} :=$

$A_{\alpha(1)\dots\alpha(m-1)} \cap \overline{nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m-2)}}$ - mit

$\delta_n(A_{\alpha(1)\dots\alpha(m)} \cap \overline{nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m-1)}}) \leq \frac{1}{2^m}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Sind jetzt alle Mengen $\overline{nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m)}}$ nicht leer, so wird wie

in a) durch $\alpha := (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in W^{\mathbb{N}}$ genau ein Punkt

$\pi_n(\alpha) \in X_n$ definiert, nämlich $\pi_n(\alpha) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m)}}$.

Sei schließlich

$X_{\mathbb{N},n} := \{ \alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots) \in W^{\mathbb{N}} \mid \overline{nA_{\alpha(1)\dots\alpha(m)}} \neq \emptyset, m \in \mathbb{N} \}$.

Aus der obigen Konstruktion und nach a) ergibt sich, daß

$(X_{\mathbb{N},n})_{n \in \mathbb{N}}$ ein striktes induktives System von null-dimensionalen metrisierbaren topologisch vollständigen abgeschlossenen Teilräumen von $W^{\mathbb{N}}$, und $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System von surjektiven stetigen Abbildungen $\pi_n : X_{\mathbb{N},n} \longrightarrow X_n$, die einen Mittelungsoperator $L_n : C_b(X_{\mathbb{N},n}) \longrightarrow C_b(X_n)$ gestatten, sind.

Insbesondere gilt für die Abbildungen π_n :

$$\pi_n(X_{\mathbb{N},n} \cap W_{\beta(1)\dots\beta(m)}^{\circ}) = \overline{A}_{\beta(1)\dots\beta(m)}; \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (i)$$

Sei weiterhin $X_{\mathbb{N}} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_{\mathbb{N},n}$ und $\pi := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$ in Ens.

Die Abbildung π ist surjektiv und stetig - bezüglich der induktiven Limes-Topologie auf $X_{\mathbb{N}}$ -, weil die Abbildungen π_n für alle $n \in \mathbb{N}$ surjektiv und stetig sind.

Nach (i) folgt

$$\pi(X_{\mathbb{N}} \cap W_{\beta(1)\dots\beta(m)}^{\circ}) \subseteq \overline{A}_{\beta(1)\dots\beta(m)} \quad \text{für } m \in \mathbb{N},$$

woraus die Stetigkeit der Abbildung π bezüglich der auf $X_{\mathbb{N}}$ induzierten Topologie von $W^{\mathbb{N}}$ folgt.

c) Die Abbildung $\pi^{\circ} : C_b(X^{\infty}) \longrightarrow C_b(X_{\mathbb{N}})$ ist ein strikter Isomorphismus auf ihrem Wertebereich

Offensichtlich ist $(\pi_n^{\circ})_{n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System von Abbildungen $\pi_n^{\circ} : C_b(X_n) \longrightarrow C_b(X_{\mathbb{N},n})$, die nach ETCHEBERRY [1, II, 1] striktstetig sind. Daraus ergibt sich die Existenz genau eines

Morphismus $\pi^+ : \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_n) \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_{\mathbb{N},n})$ in S_1 mit

$$\pi^+ = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{\circ}. \quad \text{Nach Lemma 9.1.8 gilt:}$$

$$C_b(X^{\infty}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_n) \quad \text{in } S_1 \quad \text{bzw.}$$

$$C_b(X_{\mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_{\mathbb{N},n}) \quad \text{in } S_1.$$

Weiter ist leicht zu zeigen, daß:

$$\pi^+ = \pi^\circ$$

Nach ETCHEBERRY [1, Seite 37] ist jedes π_n° ein strikter Isomorphismus von $C_b(X_n)$ nach $\pi_n^\circ(C_b(X_n))$. Also gilt:

$$C_n(X_n) \cong \pi_n^\circ(C_b(X_n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_n) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^\circ(C_b(X_n)) \text{ in } S_1$$

Also ist die Abbildung π° von $S_1\text{-}\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_b(X_n)$ nach $S_1\text{-}\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^\circ(C_b(X_n))$ ein Isomorphismus. Hieraus und nach Lemma 9.1.8

ergibt sich, daß π° ein strikter Isomorphismus von $C_b(X^\infty)$ nach $\pi^\circ(C_b(X))$ ist.

d) Die Abbildung π gestattet einen Mittelungsoperator

Nach Satz 9.1.6 existiert zu jedem $\pi_n : X_{\mathbb{N},n} \longrightarrow X_n$ ein Mittelungsoperator $L_n : C_b(X_{\mathbb{N},n}) \longrightarrow C_b(X_n)$.

Behauptung 1:

Die Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein projektives System von Abbildungen.

Beweis: Es gilt

$$L_n \circ \pi_n^\circ = \text{id}_{C_b(X_n)} \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (\text{iv})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} L_n \circ \pi_n^\circ \circ j_{n+1,n}^\circ &= j_{n+1,n}^\circ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ oder} \\ L_n \circ i_{n+1,n}^\circ \circ \pi_{n+1}^\circ &= j_{n+1,n}^\circ \circ \text{id}_{C_b(X_{n+1})} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

wobei $i_{n+1,n}$ die kanonischen Injektionen von $X_{\mathbb{N},n}$ nach $X_{\mathbb{N},n+1}$ sind, und $i_{n+1,n}^\circ$ durch $i_{n+1,n}^\circ(h_{n+1}) := h_{n+1} \circ i_{n+1,n}$ für $h_{n+1} \in C_b(X_{\mathbb{N},n+1})$ definiert sind:

Hieraus und nach (iv) folgt:

$L_n \circ i_{n+1,n}^\circ \circ \pi_{n+1}^\circ = j_{n+1,n}^\circ \circ L_{n+1} \circ \pi_{n+1}^\circ$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder

$(L_n \circ i_{n+1,n}^\circ \circ \pi_{n+1}^\circ)(g_{n+1}) = j_{n+1,n}^\circ \circ L_{n+1} \circ \pi_{n+1}^\circ(g_{n+1})$ für

alle $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} \in C_b(X_{n+1})$, oder

$(L_n \circ i_{n+1,n}^\circ \circ g_{n+1}) \circ \pi_{n+1} = (j_{n+1,n}^\circ \circ L_{n+1} \circ g_{n+1}) \circ \pi_{n+1}$

für $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} \in C_b(X_{n+1})$, oder

$(L_n \circ i_{n+1,n}^\circ)(g_{n+1}) = (j_{n+1,n}^\circ \circ L_{n+1})(g_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$,

$g_{n+1} \in C_b(X_{n+1})$, wegen der Surjektivität von π_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$.

Also gilt:

$$L_n \circ i_{n+1,n}^\circ = j_{n+1,n}^\circ \circ L_{n+1} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Behauptung 1 und nach Lemma 9.1.8 folgt, daß genau eine

stetige, lineare Abbildung $L: C_b(X_{\mathbb{N}}) \longrightarrow C_b(X^\infty)$ existiert, die der

projektive Limes von $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Offensichtlich gilt $\|L\| = 1$.

Außerdem ist L wiederum nach Lemma 9.1.8

striktstetig. Daraus und nach ETCHEBERRY [1, II, 2] folgt die

Normstetigkeit von L .

Behauptung 2:

Es gilt: $L \circ \pi^\circ = \text{id}_{C_b(X^\infty)}$.

Beweis: Es gilt:

$$j_n^\circ \circ L \circ \pi^\circ = L_n \circ i_n^\circ \circ \pi^\circ \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus ergibt sich:

$$j_n^\circ \circ L \circ \pi^\circ = L_n \circ \pi_n^\circ \circ j_n^\circ \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus und nach (iv) folgt:

$$j_n^\circ \circ L \circ \pi^\circ = j_n^\circ \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}, \text{ oder}$$

$$L \circ \pi^\circ = \text{id}_{C_b(X^\infty)}.$$

§ 10. Injektivität - Projektivität

Zunächst sollen die Definitionen und die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt werden, die im folgenden benötigt werden. Wir benutzen hierbei die Terminologie von SEMADENI [1]. Dort sind auch andere Einzelheiten zu finden.

10.1 Definitionen

- i) Ein kompakter Raum X heißt Comp-injektiv, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge Z eines beliebigen kompakten Raumes Y jede stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ hat.
- ii) Ein kompakter Raum X heißt Comp-projektiv, wenn für beliebige kompakte Räume Y und Z , für jede stetige surjektive Abbildung $g : Y \rightarrow Z$, und für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung $\hat{f} : X \rightarrow Y$ existiert mit $g \circ \hat{f} = f$.
- iii) Eine Boolesche Algebra A heißt Bool-injektiv, wenn für jede Unteralgebra C einer beliebigen Booleschen Algebra B und für jedes $f \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(C, A)$ ein $\tilde{f} \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(B, A)$ existiert mit $\tilde{f} \circ j = f$, wobei j die kanonische Injektion von C nach B ist.
- iv) Eine Boolesche Algebra A heißt Bool-projektiv, wenn für beliebige Boolesche Algebren B und C , für jedes $g \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(B, C)$ mit $g(B) = C$, und für jedes $f \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(A, C)$ ein $\hat{f} \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(A, B)$ existiert mit $g \circ \hat{f} = f$.

v) Ein Banachverband F mit der Eigenschaft

$$\|f \vee g\| = \|f\| \vee \|g\| \text{ für alle } f, g \in F \text{ mit } f \geq 0, g \geq 0$$

heißt ein M-Raum.

Ist A ein normierter Verband und existiert ein Element $e \in A$,

so daß für jedes $f \in A$: $\|f\| \leq 1 \Leftrightarrow -e \leq f \leq e$ gilt, so

heißt e eine Einheit von A .

Ein MU-Raum ist ein M-Raum mit einer Einheit. Mit MU wird diejenige Kategorie bezeichnet, deren Objekte die MU-Räume und deren Morphismen die Eins-erhaltenden Morphismen in Vectlat sind.

vi) Ein MU-Raum X heißt MU-injektiv, wenn für jeden abgeschlos-

senen Teilraum Z eines beliebigen MU-Raumes Y und für jedes

$f \in \text{Mor}_{\text{MU}}(Z, X)$ ein $\tilde{f} \in \text{Mor}_{\text{MU}}(Y, X)$ existiert mit $\tilde{f} \circ j = f$,

wobei j die kanonische Injektion von Z nach Y ist.

vii) Ein MU-Raum X heißt MU-projektiv, wenn für beliebige Ob-

jekte Y, Z aus MU, für jedes $g \in \text{Mor}_{\text{MU}}(Y, Z)$ mit $g(Y) = Z$,

und für jedes $f \in \text{Mor}_{\text{MU}}(X, Z)$ ein $\hat{f} \in \text{Mor}_{\text{MU}}(X, Y)$ existiert mit $g \circ \hat{f} = f$.

viii) Ein topologischer Raum X heißt extrem unzusammenhängend,

falls der Abschluß jeder offenen Teilmenge von X wieder

offen ist.

10.2 Satz (GLEASON [1, Th.2.5])

Ein kompakter Raum ist Comp-projektiv genau dann, wenn er extrem unzusammenhängend ist.

10.3 Satz (siehe HALMOS [2, Ths.18,19])

Eine Boolesche Algebra ist injektiv genau dann, wenn sie vollständig ist.

Im folgenden wird die Frage nach der Abgeschlossenheit der Injektivität in MU bei der Bildung des projektiven Limes in MU beantwortet. Dafür brauchen wir noch folgende Begriffe und Resultate.

10.4 Definitionen (siehe SIKORSKI [1, II, § 22])

Es seien X ein topologischer Raum und k eine unendliche Kardinalzahl. Eine Teilmenge A von X heißt k -abgeschlossen (bzw. k -offen), falls sie der Durchschnitt (bzw. die Vereinigung) höchstens k vielen offenen - abgeschlossenen Mengen ist. Eine Teilmenge B von X heißt k -nirgends dicht, falls sie eine Teilmenge einer nirgends dichten k -abgeschlossenen Teilmenge von X ist. Es seien X, Y zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt k -stetig, falls sie stetig ist und folgende Eigenschaften hat:
Ist A eine k -nirgends dichte Teilmenge von Y , so ist $f^{-1}(A)$ eine k -nirgends dichte Teilmenge von X .

10.5 Satz

Es sei $X_1^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Top, wobei alle X_n Comp-projektiv und alle kanonischen Injektionen $j_{nm} : X_m \longrightarrow X_n$ für $m \leq n \in \mathbb{N}$ k -stetig für jede unendliche Kardinalzahl sind. Sei außerdem $X^\infty = \text{s.lim}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ in Comp.

Dann ist X^∞ ein Comp-projektiver Raum.

Insbesondere ist X_1^∞ ein extrem unzusammenhängender Raum.

Beweis:

Es seien $X_n^* =: B_n$ die zu X_n dualen Booleschen Algebren für $n \in \mathbb{N}$.

Zu jedem $j_{nm} : X_m \longrightarrow X_n$ für $m \leq n \in \mathbb{N}$ existiert ein

$j_{nm}^* \in \text{Mor}_{\text{Bool}}(B_n, B_m)$ wobei j_{nm}^* dual zu j_{nm} für alle $m \leq n \in \mathbb{N}$ ist.

Offensichtlich ist $(B_n, j_{nm}^*)_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Bool, und alle j_{nm}^* für $m \leq n \in \mathbb{N}$ sind vollständige Boolesche Homomorphismen (siehe SIKORSKI [1, 22.5]).

Sei $(B_\infty, (p_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (B_n, j_{nm}^*)$. B_∞ ist eine vollständige Boolesche Algebra (siehe HALMO [1, Th.1]).

Die Folge $(B_n^*, j_{nm}^*)_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ ist ein induktives System in Comp. Andererseits gilt $X_n = B_n^*$ in Comp für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe HALMO [2, Th.7]) und $j_{nm}^{**} = j_{nm}^*$ für alle $m \leq n \in \mathbb{N}$ (siehe HALMO [2, Th.8]). Also gilt: $X_1^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} B_n^*$ in Top. Daraus und nach Satz 2.9 folgt, daß X_1^∞ ein null-dimensionaler Hausdorffscher Raum ist. Sei nX_1^∞ die größte null-dimensionale Hausdorff-Kompaktifizierung von X_1^∞ .

Nach Theorem 8 in HALMO [2] folgt, daß die Abbildungen j_{nm}^* für alle $m \leq n \in \mathbb{N}$ surjektiv sind. Daraus und nach DWINGER [2, Th.7] ergibt sich $B_\infty^* = nX_1^\infty$. Nach der Vollständigkeit von B_∞ und nach HALMO [2, Th.19] folgt, daß B_∞ Bool-injektiv ist. Daraus und nach HALMO [2, Th.10] ergibt sich, daß nX_1^∞ extrem unzusammenhängend ist. Hieraus und nach der Relation $X_1^\infty = nX_1^\infty$ folgt, daß X_1^∞ extrem unzusammenhängend ist (siehe GILLMANN-JERISON [1, 1H.4]).

Behauptung:

$$nX_1^\infty = \beta X_1^\infty \text{ in Comp.}$$

Beweis:

Nach Satz 2.5 ist X_1^∞ normal und deshalb vollständig regulär. Außerdem ist X_1^∞ extrem unzusammenhängend. Daraus und nach GLEASON [1, Th.4.1] folgt, daß βX_1^∞ extrem unzusammenhängend und deshalb null-dimensional ist.

Also existiert eine stetige Abbildung $F_1 : nX_1^\infty \rightarrow \beta X_1^\infty$ mit

$$F_1 \circ j_2 = j_1 \quad (i)$$

wobei $j_2 : X_1^\infty \rightarrow nX_1^\infty$ bzw. $j_1 : X_1^\infty \rightarrow \beta X_1^\infty$ die kanonischen Einbettungen sind.

Andererseits existiert eine stetige Abbildung $F_2 : \beta X_1^\infty \rightarrow nX_1^\infty$ mit

$$F_2 \circ j_1 = j_2 \quad (ii).$$

Nach (i) und (ii) folgt die Behauptung.

Also ist $X^\infty (= nX_1^\infty = \beta X_1^\infty)$ nach Satz 10.2 Comp-projektiv.

10.6 Bemerkungen

Der Satz bleibt gültig für $(X_1^\infty, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, f_{nm})$, wobei alle X_m Comp-projektiv und alle f_{nm} injektive k -stetige Abbildungen für jede unendliche Kardinalzahl k sind. Die Voraussetzung der Injektivität von f_{nm} beschränkt die Allgemeinheit nicht, wie in DWINGER [2,7] gezeigt worden ist.

Es seien A ein Objekt in MU und $HA := \text{Mor}_{MU}(A, \mathbb{R})$. Sei außerdem HA versehen mit der schwachen Topologie bzgl. der Funktionen $\hat{a}(f) := f(a)$ für alle $a \in A$ und $f \in \text{Mor}_{MU}(A, \mathbb{R})$. Dann ist HA ein kompakter Hausdorffscher Raum.

10.7 Satz (BANASCHEWSKI [1, Prop.2])

Es sei A ein MU -Raum.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) A ist MU-injektiv
- ii) A ist ein bedingt vollständiger Vektorverband.
- iii) HA ist extrem unzusammenhängend.
- iv) $A \cong C(X)$ in MU, wobei X ein extrem unzusammenhängender kompakter Hausdorffscher Raum homöomorph zu HA ist.

Es sei $(A_n, f_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in MU. Es ist leicht zu zeigen, daß die Abbildungen f_{nm} lineare Kontraktionen für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$ sind. Deshalb kann $(A_n, f_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ in Balat_1 betrachtet werden. Sei $(A_\infty, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A_n, f_{nm})$ in Balat_1 . Offensichtlich ist A_∞ ein MU-Raum, und folglich ist $(A_\infty, (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ der projektive Limes von $(A_n, f_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ in MU.

10.8 Satz

Es sei $(A_\infty, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A_n, f_{nm})$ in MU, wobei f_{nm} surjektive vollständige Verbandshomomorphismen für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$, und alle A_n MU-injektiv sind.

Dann ist A_∞ MU-injektiv.

Beweis:

Es seien $Hf_{nm} : HA_n \rightarrow HA_m$ bzw. $CHF_{nm} : C(HA_m) \rightarrow C(HA_n)$

definiert durch $Hf_{nm}(g_n) := g_n \circ f_{nm}$ für $g_n \in HA_n$ bzw.

$$CHF_{nm}(h_m) := h_m \circ Hf_{nm} \text{ für } h_m \in C(HA_m); n \leq m \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 10.7 folgt:

$$A_n \cong C(HA_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (i)$$

Also kann jedes $x_n \in A_n$ mit genau einem $\hat{x}_n \in C(HA_n)$ identifiziert werden. Außerdem gilt:

$$CHF_{nm}(\hat{x}_m)(g_n) = \hat{x}_m(CHF_{nm})(g_n) = f_{nm}(x_m)(g_n) \text{ für jedes } x_m \in A_m,$$

$g_n \in HA_n$ und für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$, oder

$$CHF_{nm} = f_{nm} \text{ für alle } n \leq m \in \mathbb{N} \quad (ii)$$

Offensichtlich ist $(HA_n, Hf_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Comp. Alle HA_n sind nach Satz 10.7 Comp-projektiv. Daraus und nach HALMOS [2, Th.10] sind alle zu HA_n dualen Booleschen Algebren B_n vollständig. Sei ferner $\varphi_{nm} : B_m \rightarrow B_n$ die zu Hf_{nm} dualen Booleschen Homomorphismen. Nach (i) und (ii) ergibt sich

$$f_{nm}|_{B_m} = \varphi_{nm} \quad \text{für alle } n \leq m \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt die Vollständigkeit von φ_{nm} . Daraus und nach SIKORSKI [1, 22.5] folgt die k -Stetigkeit von Hf_{nm} für jede unendliche Kardinalzahl k .

Nach HALMOS [2, Th.8] sind alle φ_{nm} surjektiv. Also ist $(B_n, \varphi_{nm})_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Bool, welches alle Voraussetzungen des Satzes 2.9 erfüllt. Daraus folgt, daß

$X^\infty := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} HA_n$ in Top ein null-dimensionaler Hausdorffscher Raum ist. Insbesondere ist X^∞ vollständig regulär als Teilraum seiner größten null-dimensionalen Hausdorff-kompaktifizierung.

Also gilt:

$$C_b(X^\infty) \cong C(\beta X^\infty) \quad \text{in MU} \quad (\text{iii})$$

Andererseits gilt:

$$C_b(X^\infty) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C(HA_n) \quad \text{in MU} \quad (\text{iv})$$

Nach (i) folgt:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C(HA_n) \cong A_\infty \quad \text{in MU} \quad (\text{v})$$

Nach (iii), (iv), (v) ergibt sich:

$$A_\infty \cong C(\beta X^\infty) \quad \text{in MU} \quad (\text{vi})$$

Alle Räume HA_n und alle Abbildungen Hf_{nm} erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 10.5 (siehe auch Bemerkung 10.6). Daraus folgt, daß βX^∞ Comp-projektiv ist. Hieraus, nach (vi) und nach Satz 10.7 ergibt sich die MU-Injektivität von A_∞ .

10.9 Definitionen

- i) Analog zur MU-Injektivität bzw. MU-Projektivität wird die Ban₁-Injektivität bzw. Ban₁-Projektivität definiert.
- ii) Es sei X ein Banachraum. Ein Comp-projektiver Raum Y zusammen mit einer surjektiven stetigen Abbildung $f : Y \longrightarrow X$ (in Zeichen (f, Y)) heißt eine Comp-projektive Kohülle von X , wenn für jeden kompakten Raum Z und für jede stetige Abbildung $g : Z \longrightarrow Y$, so daß $f \circ g$ surjektiv ist, g surjektiv ist.
- iii) Es sei F ein Banachraum. Eine Ban₁-injektive Hülle von F ist ein Ban₁-injektiver Raum G zusammen mit einer linearen isometrischen Injektion $f : G \longrightarrow F$ (in Zeichen (G, f)) mit folgender Eigenschaft:
- Für jeden Banachraum E und für jedes $g \in \text{Mor}_{\text{Ban}_1}(F, E)$, so daß $g \circ f$ eine Isometrie ist, ist g eine Isometrie.

10.10 Bemerkung

Folgendes Problem ist noch von Interesse:

Es seien $(A_\alpha, (f_\alpha)_{\alpha \in I}) = \varinjlim_{\alpha \in I} (A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ in Ban_1 und $(\hat{A}_\alpha, h_\alpha)$ die Ban₁-injektiven Hüllen von A_α für jedes $\alpha \in I$. Existieren $\hat{f}_{\alpha\beta} \in \text{Mor}_{\text{Ban}_1}(\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha)$, so daß $(\hat{A}_\alpha, \hat{f}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Ban_1 ist, und die Relation

$$\varinjlim_{\alpha \in I} \hat{A}_\alpha = \widehat{\varinjlim_{\alpha \in I} A_\alpha} \quad \text{in } \text{Ban}_1 \quad (i)$$

gilt?

Das Problem wird i.a. negativ beantwortet, nicht nur für die Kategorie Ban_1 , aber auch für die MU, da folgendes gilt:

Sind B_1, B_2 Boolesche Algebren, $f : B_1 \rightarrow B_2$ ein Boolescher Homomorphismus und $\hat{B}_1$ bzw. $\hat{B}_2$ die Vervollständigung von B_1 bzw. B_2 , so existiert ein Boolescher Homomorphismus $\hat{f} : \hat{B}_1 \rightarrow \hat{B}_2$ mit $\hat{f}|_{B_1} = f$ (siehe SIKORSKI [1, § 33.1]), der i.a. kein vollständiger Boolescher Homomorphismus ist (siehe SIKORSKI [1, § 34.Examples A,B,D]).

Daraus folgt folgendes:

Sind $(B_\alpha, (g_\alpha)_{\alpha \in I}) = \lim_{\alpha \in I} (B_\alpha, g_{\alpha\beta})$ in Bool und $\hat{B}_\alpha$ die Vervollständigung von B_α für alle $\alpha \in I$, so existiert i.a. kein projektives System $(\hat{B}_\alpha, \hat{g}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ in Bool, wobei $\hat{g}_{\alpha\beta}$ vollständige Boolesche Homomorphismen von $\hat{B}_\beta$ nach $\hat{B}_\alpha$ mit $\hat{g}_{\alpha\beta}|_{B_\beta} = g_{\alpha\beta}$ sind.

Daraus und nach Bemerkung 10.6 folgt, daß i.a. keine vollständige Boolesche Algebra $B'_\infty = \lim_{\alpha \in I} \hat{B}_\alpha$ existiert. Durch Dualisierung kann bewiesen werden, daß i.a. kein $\hat{f}_{\alpha\beta} \in \text{Mor}_{\text{Ban}_1}(A_\beta, A_\alpha)$ existiert, so daß $(\hat{A}_\alpha, \hat{f}_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in I}$ ein projektives System in Ban_1 ist, und die Relation (i) gilt.

Schließlich wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß der Ban_1 -induktive Limes von Ban_1 -injektiven Räumen i.a. kein Ban_1 -injektiver Raum ist.

10.11 Gegenbeispiel

Es seien $D_n := \left\{ \frac{2i-1}{2^n} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}$ für $n \in \mathbb{N}$ versehen mit der diskreten Topologie, und die Abbildungen $g_{n+1,n} : D_n \rightarrow D_{n+1}$ bzw. $h_{n,n+1} : D_n \rightarrow D_{n+1}$ definiert durch $g_{n+1,n}(x) := x + \frac{1}{2^{n+1}}$ bzw. $h_{n+1,n}(x) := x - \frac{1}{2^{n+1}}$ für $x \in D_n$. Die Abbildungen $g_{n+1,n}, h_{n+1,n}$ sind injektiv, und es gilt

$g_{n+1,n}(D_n) \cap h_{n+1,n}(D_n) = \emptyset$ und $g_{n+1,n}(D_n) \cup h_{n+1,n}(D_n) = D_{n+1}$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Also existiert zu jedem $y \in D_{n+1}$ genau ein
 $x \in D_n$, so daß entweder $y = g_{n+1,n}(x)$ oder $y = h_{n+1,n}(x)$. Seien
jetzt die Abbildungen $f_{n,n+1} : D_{n+1} \rightarrow D_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert
durch

$$f_{n,n+1}(x) := \begin{cases} g_{n+1,n}(x); & \text{falls } y = g_{n+1,n}(x) \\ h_{n+1,n}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(D_n, f_{n,n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System in Comp und es
gilt $\Delta = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} D_n$ in Comp . Insbesondere sind alle $f_{n,n+1}$ surjektiv.
Offensichtlich ist $(C(D_n), f_{n,n+1}^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System
in Ban_1 .

Nach Theorem 11.8.7 in SEMADENI [1] gilt:

$$C(\Delta) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} C(D_n) \quad \text{in } \text{Ban}_1$$

Die Räume $C(D_n)$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ Ban_1 -injektiv, weil alle
Räume D_n Comp -projektiv sind (siehe SEMADENI [1, 25.5.1, 24.7.1]).
 $C(\Delta)$ ist aber kein Ban_1 -injektiver Raum, weil Δ kein Comp -pro-
jektiver Raum ist.

10.12 Bemerkungen

- i) Durch Gegenbeispiel 10.11 ist auch folgendes gezeigt worden:
Der Comp -projektive Limes von Comp -projektiven Räumen ist
i.a. kein Comp -projektiver Raum.
- ii) Der Bool -induktive Limes von injektiven Booleschen Algebren
ist i.a. keine injektive Boolesche Algebra, da folgendes gilt:
Nach HAIMO [1, Th.9] ist der Boolesche Raum des induktiven
Limes eines induktiven Systems von Booleschen Algebren B_α
 Comp -homöomorph zu dem projektiven Limes des projektiven
Systems der Booleschen Räume $S(B_\alpha)$ für $\alpha \in I$.

Es sei B_n die zu D_n duale Boolesche Algebra für $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(B_n, f_{n,n+1}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ein induktives System in Bool.

Daraus und nach dem oben genannten Resultat von Haimo folgt die Relation:

$$\Delta = S(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} B_n) \quad \text{in Comp} \quad (1)$$

Alle B_n sind Bool-injektiv, weil die entsprechende D_n Comp-projektiv sind (siehe HALMOS [2, Th.10] und Satz 10.3).

Δ ist kein Comp-projektiver Raum. Daraus, nach (1), nach HALMOS [2, Th.10] und nach Satz 10.3 ergibt sich, daß die Boolesche Algebra $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} B_n$ kein injektives Objekt in Bool ist.

Anhang (zu Teil II)

Strikte Desintegrationen

Definition

Es seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $f : X \longrightarrow Y$ eine meßbare Abbildung und $\nu = \mu \circ f^{-1}$ das Bildmaß von μ .

Eine Funktion $\lambda : \mathcal{M} \times Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ heißt eine Desintegration von μ bezüglich f und $\mathcal{A}$, wenn gilt:

1) Für jede Menge $A \in \mathcal{M}$ ist die Funktion

$$\lambda(A, \cdot) : Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+ \text{ meßbar.}$$

2) Für jedes $y \in Y$ ist $\lambda(\cdot, y) : \mathcal{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ ein Maß.

3) Für jedes $A \in \mathcal{M}$ und für jedes $B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A \cap f^{-1}(B)) = \int_B \lambda(A, y) \nu(dy).$$

Die Disintegration λ heißt strikt, wenn für alle $y \in Y$ und für jede Menge $A \in \mathcal{M}$ gilt, daß aus $A \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ folgt $\lambda(A, y) = 0$.

Satz

Es seien $(X, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathcal{M}, \mu) \approx \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, f_{mn}, \mathcal{M}_n, \mu_n)$ in $\mathcal{M}$, $(Y, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine induktive Folge von meßbaren Abbildungen $g_n : X_n \longrightarrow Y$, $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Bildmaßen $\nu_n := \mu_n \circ g_n^{-1}$ von μ_n , und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von strikten Desintegrationen λ_n bzgl. g_n und $\mathcal{A}$ mit

$$\lambda_n(f_{mn}^{-1}(A_m), y) \leq \lambda_m(A_m, y); \quad n \leq m \in \mathbb{N}$$

für jedes $A_m \in \mathcal{M}_m$ und $y \in Y$.

Dann existiert eine strikte Desintegration $\lambda : \mathcal{M} \times Y \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ bzgl.

$g = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} g_n$ und $\mathcal{A}$, so daß

$$\lambda(A, y) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(f_n^{-1}(A), y)$$

Beweis:

Behauptung 1:

Es existiert der Limes $\lambda(A, y)$ von $(\lambda_n(f_n^{-1}(A), y))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bar{\mathbb{R}}_0^+$ für alle $A \in \mathcal{M}$ und $y \in Y$.

Beweis:

Es seien $A \in \mathcal{M}$, $y \in Y$ und $n \leq m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$\lambda_n(f_n^{-1}(A), y) = \lambda_n(f_{mn}^{-1}(f_n^{-1}(A)), y) \leq \lambda_m(f_{mn}^{-1}(A), y)$. Daraus folgt, daß der Limes $\lambda(A, y) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(f_n^{-1}(A), y)$ in $\bar{\mathbb{R}}_0^+$ existiert.

Behauptung 2:

Die Funktion $\lambda(A, \cdot) : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ ist für jedes $A \in \mathcal{M}$ meßbar, und $\lambda(\cdot, y) : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ ist für jedes $y \in Y$ ein Maß.

Beweis:

Die Funktion $\lambda(A, \cdot)$ ist meßbar, als Supremum von abzählbar vielen meßbaren Funktionen. Nach Satz 3.1.2 ist $\lambda(\cdot, y)$ für jedes $y \in Y$ ein Maß.

Offensichtlich gilt $v_n \leq v_m$ für alle $n \leq m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, daß man ein Maß $v : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ mit $v = \lim_{n \in \mathbb{N}} v_n$ und $v = \mu \circ g^{-1}$ definieren kann.

Behauptung 3:

Für jedes $A \in \mathcal{M}$ und für jedes $B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A \cap g^{-1}(B)) = \int_B \lambda(A, y) v(dy).$$

Beweis:

Sei $A \in \mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A \cap g^{-1}(B)) &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(f_n^{-1}(A \cap g^{-1}(B))) = \\ &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(f_n^{-1}(A) \cap g_n^{-1}(B)) = \\ &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_B \lambda_n(f_n^{-1}(A), y) \mu_{n \circ g_n^{-1}}(dy) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_{g_n^{-1}(B)} \lambda_n(f_n^{-1}(A), g_n(x)) \mu_n(dx) = \\
 &= \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_X 1_{g_n^{-1}(B)} \cdot \lambda_n(f_n^{-1}(A), g(x)) \mu(dx) = \\
 &= \int_X \lim_{n \in \mathbb{N}} 1_{g_n^{-1}(B)} \cdot \lambda_n(f_n^{-1}(A), g(x)) \mu(dx) = \\
 &= \int_{g^{-1}(B)} \lim_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(f_n^{-1}(A), g(x)) \mu(dx) = \\
 &= \int_{g^{-1}(B)} \lambda(A, g(x)) \mu(dx) = \\
 &= \int_B \lambda(A, y) \mu g^{-1}(dy) = \\
 &= \int_B \lambda(A, y) \nu(dy)
 \end{aligned}$$

Behauptung 4:

Sei $A \in \mathcal{M}$ und $y \in Y$ mit $A \cap g^{-1}(y) = \emptyset$.

Dann gilt: $\lambda(A, y) = 0$.

Beweis:

Sei $A \in \mathcal{M}$ und $y \in Y$ mit $A \cap g^{-1}(y) = \emptyset$.

Dann gilt: $f_n^{-1}(A \cap g^{-1}(y)) = \emptyset$, oder $f_n^{-1}(A) \cap g_n^{-1}(y) = \emptyset$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Daraus ergibt sich $\lambda_n(f_n^{-1}(A), y) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Hieraus

und nach Behauptung 1 folgt $\lambda(a, y) = 0$.

Also ist λ eine strikte Desintegration von μ bzgl. g und $\mathcal{A}$.

Literaturverzeichnis

Banach, S. [1]

Théorie des Opérations Linéaires
Warschau 1932

Banaschewski, B. [1]

The duality between M-spaces and compact Hausdorff spaces
Math. Nachr. 75, (1976), 41-45

Borges, C.J.R. [1]

On stratifiable spaces
Pacific J. Math. 17, (1966), 1-15

Bourbaki, N. [1]

Algèbre, Chap. 2
Hermann, Paris 1962

Bourbaki, N. [2]

Théorie des Ensembles
Hermann, Paris 1970

Bourbaki, N. [3]

Topologie Générale I
Hermann, Paris 1971

Brown, L.D.; Purves, R. [1]

Measurable selectors of multifunctions and applications
The Annals of Statistics 1, (1973), 902-912

Buckley, J.J. [1]

Graphs of measurable functions
Proc. Amer. Math. Soc. 44, (1974), 78-80

Christenson, C.O.; Voxman, W.L. [1]

Aspects of Topology
Marcel Dekker, Inc., New York and Basel (1977)

Ditor, S.Z. [1]

On a lemma of Miljutin concerning averaging operators
in continuous spaces

Trans. Amer. Math. Soc. 149, (1970), 443-452

Dugundji, J. [1]

Topology

Allyn and Bacon, Inc., Boston 1970

Dwinger, Ph. [1]

Remarks on the field representations of Boolean algebras

Indag. Math. 22, (1960), 213-217

Dwinger, Ph. [2]

The dual space of the inverse limit of an inverse limit
system of Boolean algebras

Indag. Math. 26, (1964), 164-172

Etcheberry, A.J. [1]

Dissertation

Berkeley University 1973

Fremlin, D.H. [1]

Topological Riesz Spaces and Measure Theory

Cambridge University Press. 1974

Gillman, L.; Jerison, M. [1]

Rings of Continuous Functions

Springer-Verlag 1976

Gleason, A.M. [1]

Projective topological spaces

Illinois J. Math. 2, (1958), 482-489

Graf, S. [1]

On the existence of strong Liftings in second countable
topological spaces

Pacific J. Math. 58, (1975), 419-426

Haimo, F. [1]

Some Limits of Boolean algebras

Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951), 566-576

Halmos, P.R. [1]

Measure Theory

Van Nostrand Reinhold Company

New York etc. 1950

Halmos, P.R. [2]

Lectures on Boolean Algebras

Springer-Verlag 1974

Himmelberg, C.J. [1]

Measurable relations

Fund. Math. LXXXVII, (1975), 53-72

Himmelberg, C.J.; Parthasarathy, T.; Van Vleck, F.S. [1]

On measurable relations

Fund. Math. CXI, (1981), 161-167

Himmelberg, C.J.; Van Vleck, F.S. [1]

Some selection theorems for measurable functions

Canadian J. Math. 21, (1969), 394-399

Hoffmann-Jørgensen, J. [1]

A generalization of the strick topology

Math. Scand. 30, (1972), 313-323

Ionescu Tulcea, A. und C. [1]

Topics in the Theory of Liftings

Springer-Verlag 1969

Ionescu Tulcea, C. [1]

Sur certains endomorphismes de $L_c(Z, \mu)$

C.R. Acad. Sci. Paris 261, (1965), 4961-4963

Ioffe, A.D. [1]

Representation theorems for multifunctions and analytic sets

Full. Amer. Math. Soc., 84, (1978), 142-144

Ioffe, A.D. [2]

One-to-one Carathéodory representation theorem for multifunctions
with uncountable values

Fund. Math., CIX (1980), 19-29

Köthe, G. [1]

Topologische lineare Räume I

Springer-Verlag 1960

Kuratowski, K.; Ryll-Nardzewski, C. [1]

A General Theorem on Selectors

Bull. Acad. Polon. Sci. XIII, (1965), 395-403

Michael, E. [1]

Some extension theorems for continuous functions

Pacific J. Math. 3, (1953), 789-806

Michael, E. [2]

Continuous Selections I

Annals of Math. 63 (1956), 361-382

Michael, E. [3]

Continuous Selections II

Annals of Math. 64 (1956), 562-580

Michael, E. [4]

Locally multiplicatively-convex topological algebras

Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952), 1-79

Neumann von, J. [1]

Einige Sätze über meßbare Abbildungen

Annals of Math. 33 (1932), 574-586

Robertson, A.D.; Robertson, W.J. [1]

Topological vector spaces

Cambridge University Press 1973

Sainte-Beuve, M.-F. [1]

On the Extension of Von Neumann-Aumann's Theorem

J. Functional Analysis 17, (1974), 112-129

Sakai, S. [1]

C*-Algebras and W*-Algebras

Springer-Verlag 1971

Schwartz, L. [1]

Radon measures on arbitrary topological spaces and
cylindrical measures

Oxford University Press, London, 1973

Segal, I.E. [1]

Equivalences of measure spaces

Amer. J. Math. 73, (1951), 275-313

Semadeni, Z. [1]

Banach Spaces of continuous functions, Vol 1

Warschau 1971

Semadeni, Z.; Zidenberg, H. [1]

Inductive and Inverse Limits in the Category of Banach Spaces

Bull. Acad. Polon. Sci. XIII, (1965), 579-583

Sikorski, R. [1]

Boolean Algebras

Springer-Verlag 1964

Srivastava, S.M. [1]

A representation theorem for closed valued multifunctions

Bull. Acad. Polon. Sci. XXVII (1979), 511-514

Srivastava, S.M. [2]

Selection and representation theorems for σ -compact valued
multifunctions

Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 775-780

Vasilach S. [1]

Direct Limits of Measure Spaces

J. Multivariate Analysis 1, (1971), 394-411

Vasilach, S. [2]

A Calculus of Direct Limits of Probability Spaces

J. Multivariate Analysis 3, (1973), 1-16

Vasilach, S. [3]

Integration of Direct Limits of Real Random Variables
J. Multivariate Analysis 3 (1973), 17-25

Vasilach, S. [4]

Some Remarks on the Direct Limits of Measure Spaces
J. Multivariate Analysis 4 (1974), 222-233

Vesterstrøm, J.; Wils, W. [1]

On points realizations of L -endomorphisms
Math. Scand. 25, (1969), 178-180

Wagner, D.H. [1]

Survey of measurable selection theorems
Siam J. Control and Optimization 15, (1977), 859-903

Wagner, D.H. [2]

Survey of measurable selection theorems
Proc. Conf. Measure Theory, Oberwolfach (D. Kölzow ed.),
Lect. Notes Math. 794
Springer-Verlag (1980), 176-219

Whitehead, J.H.C. [1]

Combinatorial homotopy I
Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949), 213-245

Willard, S. [1]

General Topology
Addison-Wesley Publishing Company 1970

Lebenslauf

Am 27. Juni 1951 wurde ich als Sohn des Arbeiters Dimitri Machera und seiner Ehefrau Kalliopi Machera, geb. Koumarou in Ierissos Chalkidikis geboren.

Von 1957 bis 1963 besuchte ich die Volksschule in Ierissos, dann das Gymnasium in Arnea, Ierissos und Athen, wo ich 1969 das Abitur machte.

Von 1969 bis 1973 studierte ich in Athen Mathematik, im Jahr 1973 und Januar 1974 machte ich das Diplom in Mathematik.

Von 1974 bis 1976 arbeitete ich bei Herrn Professor Dr. D.A. Kappos (Universität Athen) als wissenschaftlicher Mitarbeiter, teilweise mit einem Stipendium des griechischen nationalen Forschungsinstituts.

Im Jahr 1977 leistete ich Militärdienst.

Im Jahr 1978 arbeitete ich außerhalb der Universität.

1979 arbeitete ich bei Herrn Professor Dr. D.A. Kappos (Universität Kreta) als wissenschaftlicher Mitarbeiter.

Von Mai 1980 bis April 1983 war ich am Mathematischen Institut in Erlangen als wissenschaftliche Hilfskraft tätig. Von Mai bis Juni 1983 war ich an demselben Institut als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.

Erlangen, im November 1983

Druck: Copy Center 2000
Obere Karlstraße 30
8520 Erlangen